ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Facultad de Ciencias Matemáticas. UCM

José María Martínez Ansemil
Socorro Ponte Miramontes

Septiembre 2018

Índice general

Introducción

Este Manual se ha preparado para su utilización por los alumnos de la asignatura ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM. En él se desarrollan los temas del programa de esa asignatura siguiendo fundamentalmente los libros de Ahlfors, Conway, Marsden-Hoffman y Rudin (véase la Bibliografía indicada en el programa de la asignatura).

Se agradece cualquier comentario que ayude a mejorarlo.

Madrid, Septiembre de 2018

José María Martínez Ansemil, Socorro Ponte Miramontes

Tema 1

Números complejos: Propiedades algebraicas y topológicas

Vamos a comenzar recordando el concepto de número complejo y repasando las propiedades algebraicas del conjunto de tales números.

En cursos previos se han introducido los conceptos de *número natural*, *entero*, *racional* e *irracional*, todos ellos pertenecen al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Ese conjunto no es todo lo grande que se necesita algunas veces, pues, por ejemplo, en él no puede resolverse la ecuación $x^2+1=0$, ni muchas otras del tipo $p(x)=0$, siendo p un polinomio en la variable real x. Eso motiva la introducción de otro conjunto de números, llamados los *números complejos*, que incluye al de los reales, y en el que todo polinomio no constante tiene raíces en el propio conjunto de esos números. Este es el llamado teorema fundamental del álgebra, del que daremos aquí varias demostraciones usando resultados que obtendremos en esta asignatura.

Se atribuye a Gerolamo Cardano (1501-1576) la introducción de los números complejos, en su obra Ars Magna de 1545. En 1572 se publicó un texto póstumo de Rafael Bombelli (1526–1572) en el que se incluyen las reglas de adición, sustracción y multiplicación de este tipo de números.

El término, hoy usado de “números complejos” se debe a Carl Gauss (1777 – 1855), quien también hizo popular la letra “i” que Leonard Euler (1707-1783) había usado en alguna ocasión (los físicos suelen usar la letra j pues la i la usan para la intensidad de una corriente). En 1806 Jean-Robert Argand (1768–1822) da una interpretación de los números complejos como vectores en el plano.

Se define un número complejo como un par ordenado de números reales, esto es, como un elemento de $\mathbb{R}^2$. En el conjunto de esos elementos se definen las siguientes operaciones $+$ y $\cdot$

Dados $z=(x,y)$ y $z'=(x',y')$,

$$z+z'=(x+x',y+y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + x'y),$$

con ellas el conjunto de los números complejos es un *cuerpo* que se denotará por $\mathbb{C}$. El elemento *neutro para la suma* es $(0,0)$, el *opuesto* de $z = (x,y)$ es $(-x,-y)$ el *elemento neutro para el producto* es $(1,0)$ y todo $z \neq (0,0)$ tiene por inverso a $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Dado $z = (x,y)$ se llamará *parte real* de z al número real x, y *parte imaginaria* de z al número real y. A veces se escribe $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

La aplicación $x \in \mathbb{R} \mapsto (x,0) \in \mathbb{C}$ es un homomorfismo inyectivo de cuerpos, lo que nos permite identificar a $\mathbb{R}$ con un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Si denotamos por i al número complejo $(0,1)$, al que llamaremos la *unidad imaginaria*, y tenemos en cuenta la anterior identificación, resulta que

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) \equiv x + iy.$$

Obsérvese que $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$ que identificamos con -1.

Los números complejos pueden ser representados en un sistema cartesiano como elementos de $\mathbb{R}^2$. De hecho como conjuntos coinciden $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, pero en $\mathbb{C}$ hay una operación de multiplicar que no se considera en $\mathbb{R}^2$.

Se define el *conjugado* del número complejo $z = x + iy$ como $\overline{z} = x - iy$. Se verifican las siguientes propiedades:

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'},$$

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}, \qquad z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2,$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \qquad z - \overline{z} = i \cdot 2 \operatorname{Im} z \quad \text{y} \quad \text{si } z \neq 0, \ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

El conjugado del conjugado de un número complejo z es el propio z.

Se llama *módulo* de un número complejo $z = x + iy$ al número real mayor o igual que 0, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, este número real coincide con $\sqrt{z\overline{z}}$ y es justamente la distancia euclídea entre los puntos $(0,0)$ y (x,y). Cuando z es un número real, su módulo coincide con su valor absoluto.

Propiedades:

$$|z| = |-z| = |\overline{z}|, \qquad |zz'| = |z||z'|, \qquad \text{si } z' \neq 0, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad |\operatorname{Re} z| \leq |z|,$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|, \qquad |z| \leq \ |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Veamos la demostración de esta última desigualdad que será muy usada en lo que sigue:

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} =$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2.$$

Seguimos con las propiedades del módulo:

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

En efecto

$$|z| = |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'|$$

con lo que

$$|z| - |z'| \leq |z - z'|.$$

Análogamente

$$|z'| - |z| \leq |z - z'|$$

lo que nos da el resultado.

No puede definirse una relación de orden entre los elementos de $\mathbb{C}$ que sea compatible con las operaciones de adición y multiplicación y el orden de $\mathbb{R}$. En efecto, si hubiese una tal relación el número i (que desde luego no es 0) no podría ser mayor que 0, pues si lo fuese el producto $i \cdot i = -1$ debería ser mayor que 0 y no lo es. Tampoco i podría ser menor que 0 pues si lo fuese $-i$ sería mayor que 0 y entonces $(-i)(-i) = -1$ debería ser mayor que 0 y no lo es.

Para todo número complejo z distinto de 0 existe un único número real $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

(fórmula módulo-argumental). Para ver esto hacemos lo siguiente: $\frac{z}{|z|}$ es un punto (x, y) de la circunferencia unidad y entonces existe un único $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, con lo que $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Este $\theta \in [-\pi, \pi)$ se puede definir como $\arctan\frac{y}{x}$. Téngase en cuenta que si suponemos, por ejemplo, que $x > 0$ e $y > 0$, entonces $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ y

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

y como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ resulta que

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = x^2$$

de donde se sigue que $\cos\theta = x$ (nótese que tanto $\cos\theta$ como x son mayores que 0). De esto y de la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se sigue que $\operatorname{sen}\theta = y$ (obsérvese que tanto $\operatorname{sen}\theta$ como y son mayores que 0). Los demás casos para x e y se resuelven de forma similar.

Dado que las funciones sen y cos son periódicas de período 2π, realmente hay un único número real con esa propiedad en cualquier intervalo semiabierto de amplitud 2π.

De propiedades bien conocidas de las funciones seno y coseno de variable real se deduce fácilmente que para $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $z' = |z'|(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i \operatorname{sen}(\theta+\theta')).$$

Obsérvese que $\theta + \theta'$ puede salirse del intervalo $[-\pi, \pi)$, si se quiere puede cambiarse $\theta + \theta'$ por un elemento de $[-\pi, \pi)$ que se diferencie de ese en 2π ó -2π según el caso.

Para todo número complejo $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y todo número natural n se verifica que

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

lo que puede probarse fácilmente por inducción.

Dado un número complejo z, $z \neq 0$, y un número natural n, existen $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$w_1^n = w_2^n = \cdots = w_n^n = z.$$

Si $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\ \theta)$ estos números complejos son los $w_k,\ k = 1, ..., n$, definidos por

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Puede justificarse que esas n raíces son todas distintas y que no hay ningún otro número complejo w tal que $w^n = z$.

Se dice que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente a un número complejo z_0 si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Longrightarrow\ |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Esto es, $\{z_n\}$ es convergente a z_0 si y sólo si la sucesión de números reales $\{|z_n - z_0|\}$ converge a 0.

Si escribimos $z_n = x_n + iy_n$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces $\{z_n\}$ converge a z_0 si y sólo si $\{x_n\}$ converge a x_0 e $\{y_n\}$ converge a y_0.

Si $z_n \to z_0$ entonces $|z_n| \to |z_0|$ y $z_n \to 0$ si y sólo si $|z_n| \to 0$.

Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N},\quad p, q \geq \nu\ \Longrightarrow\ |z_p - z_q| < \varepsilon.$$

Ocurre también que $\{z_n\}$ es de Cauchy si y sólo si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ lo son.

Se verifica que toda sucesión convergente está acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Al igual que ocurre en $\mathbb{R}$, se verifica también que una sucesión de números complejos es de Cauchy si y sólo si es convergente. Por esta razón se dice que $\mathbb{C}$ es completo.

Si $\{z_n\}$ converge a z_0 y $\{w_n\}$ converge a w_0 entonces $\{z_n + w_n\}$ converge a $z_0 + w_0$ y $\{z_n w_n\}$ converge a $z_0 w_0$. Además si $z_n \neq 0$ para todo n y $z_0 \neq 0$ entonces $\{\frac{1}{z_n}\}$ converge a $\frac{1}{z_0}$.

Dados un número complejo $z_0 = x_0 + iy_0$ y un número real $r > 0$ denotaremos por $D(z_0, r)$ a la bola euclídea abierta de $\mathbb{R}^2$ de centro (x_0, y_0) y radio r. Esto es:

$$\begin{aligned} D(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}, \end{aligned}$$

este conjunto se llama el *disco abierto* de centro z_0 y radio r y es realmente el círculo de centro (x_0, y_0) y radio r (excluyendo la circunferencia de ese centro y ese radio).

Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ es *abierto* si para cada $z \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset A$. Un subconjunto C de $\mathbb{C}$ se dice *cerrado* si su complementario es abierto.

La colección de abiertos de $\mathbb{C}$ constituye una topología, esta topología está inducida por la métrica $d(z, z') = |z - z'|$. El espacio métrico $\mathbb{C}$ es completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en él es convergente, cosa que ya hemos comentado anteriormente.

Dados un subconjunto S de $\mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se define,

$$d(z_0, S) = ínf\{d(z_0, z) : z \in S\}.$$

Para dos subconjuntos S y T de $\mathbb{C}$ se define,

$$d(S, T) = ínf\{d(z, w) : z \in S, w \in T\}.$$

Un punto z de un subconjunto S de $\mathbb{C}$ es un *punto interior de* S si existe un disco abierto centrado en z contenido en S. Denotaremos por $\overset{o}{S}$ al conjunto de los puntos interiores del conjunto S.

$\overset{o}{S}$ puede ser vacío, por ejemplo si S es un subconjunto de $\mathbb{C}$ con un único punto o si S es una sucesión de puntos de $\mathbb{C}$. Observamos que si $S \subset T$ entonces $\overset{o}{S} \subset \overset{o}{T}$.

Si $S = D(z, r)$, entonces $\overset{o}{S} = D(z, r)$.

Se verifica que S es abierto si y sólo si $S = \overset{o}{S}$.

Se dice que un punto z de $\mathbb{C}$ es un *punto de acumulación* de un subconjunto S de $\mathbb{C}$ si todo disco abierto centrado en z contiene algún punto de S distinto de z (si es que z pertenece a S). Esto es, para todo $r > 0$ se verifica que $D(z, r) \cap S \neq \emptyset, \{z\}$.

Denotaremos por S' al conjunto de los puntos de acumulación del conjunto S.

Se verifica que S es cerrado si y sólo si $S' \subset S$ y que $z \in S'$ si y sólo si existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos del conjunto S, $z_n \neq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\}$ convergen a z.

Se dice que un punto z de $\mathbb{C}$ es *adherente* a un subconjunto S de $\mathbb{C}$ si todo disco abierto con centro en z tiene algún punto de S. Esto es, para todo $r > 0$ se verifica que $D(z,r) \cap S \neq \emptyset$. Denotaremos por $\overline{S}$ al conjunto de los puntos adherentes del conjunto S. Un punto z pertenece a $\overline{S}$ si y sólo si $d(z,S) = 0$. Claramente $\overline{S} = S \cup S'$.

Se verifica que S es cerrado si y sólo si $S = \overline{S}$ y que $z \in \overline{S}$ si y sólo si existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos del conjunto S, $\{z_n\}$ convergente a z.

Se llama *punto frontera* de un conjunto S de $\mathbb{C}$ a todo punto z de $\mathbb{C}$ con la propiedad de que para todo $r > 0$ se verifique que

$$D(z,r) \cap S \neq \emptyset \quad \text{y} \quad D(z,r) \cap (\mathbb{C} \backslash S) \neq \emptyset.$$

Denotaremos por ∂S al conjunto de los puntos frontera del conjunto S.

Un subconjunto K de $\mathbb{C}$ se dice *compacto* si de todo recubrimiento de él por abiertos se puede extraer uno finito, o equivalentemente, $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si toda sucesión de puntos de K tiene una subsucesión convergente a un punto de K (esto es consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass de primer curso). Los conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ son los conjuntos que son a la vez cerrados y acotados (esto es consecuencia del teorema de Heine-Borel de primer curso).

Un subconjunto S de $\mathbb{C}$ se dice *conexo* si no existe ningún par de abiertos V_1, V_2 de $\mathbb{C}$ tales que:

a) $V_1 \cap V_2 \cap S = \emptyset$

b) $S \subset V_1 \cup V_2$

c) $V_1 \cap S \neq \emptyset$

d) $V_2 \cap S \neq \emptyset$.

Los discos abiertos son conjuntos conexos, pero la unión de dos discos abiertos disjuntos no lo es. La unión de conjuntos conexos con algún punto en común es también un conjunto conexo.

Un conjunto S es *conexo por arcos* si para cualesquiera dos puntos z, $w \in S$ existe una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to S$ tal que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. Todo conjunto conexo por arcos es conexo y todo conjunto abierto y conexo es conexo por arcos.

Se dice que un subconjunto S de $\mathbb{C}$ es *convexo* si para todo par de puntos z, $w \in S$ se verifica que el segmento que los une, $L[z,w] = \{z + t(w-z) : t \in [0,1]\}$, está contenido en S. Todo conjunto convexo es conexo pues es conexo por arcos.

Series de números complejos

Una serie de números complejos es un par formado por una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos y por otra, también de números complejos $\{s_n\}$ en la que, por cada n, $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. Normalmente a las series de números complejos se las denota por $\sum z_n$. Una serie se dice convergente si es convergente la correspondiente sucesión $\{s_n\}$ (de sus sumas parciales). Cuando la serie es convergente se denota al límite de la sucesión $\{s_n\}$ por s y se le llama suma de la serie $\sum z_n$ y también se escribe $s = \sum z_n$ (nótese que se comete un abuso de notación).

Si por cada n hacemos $z_n = x_n + iy_n$, entonces $\sum z_n$ converge si y sólo si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen y además

$$\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n.$$

Si $\sum z_n$ converge, entonces $z_n \to 0$. Téngase en cuenta que para $n \geq 2$, $z_n = s_n - s_{n-1}$.

Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $|z_0| < 1$, la serie $\sum z_0^n$ es convergente y su suma es $\frac{z_0}{1-z_0}$. Si consideramos también el término correspondiente a $n = 0$, esto es, consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n = \sum_{n=1}^{\infty} z_0^{n-1}$, entonces su suma es $\frac{1}{1-z_0}$.

Para series complejas hay también un criterio de Cauchy análogo al que conocemos en el caso real: $\sum z_n$ converge si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N}, \ q > p \geq \nu \Longrightarrow \left| \sum_{n=p+1}^{q} z_n \right| < \varepsilon.$$

Se dice que una serie $\sum z_n$ es absolutamente convergente si $\sum |z_n|$ es convergente. Obsérvese que si una serie es absolutamente convergente también es convergente. Para estudiar la convergencia absoluta de una serie hay varios criterios, nosotros aquí usaremos normalmente el de la raíz (o de Cauchy), que dice que $\sum z_n$ es absolutamente convergente cuando $\overline{\textit{lím}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$. Cuando este límite superior es 1 puede ser convergente o no y cuando es mayor que 1 no converge pues en ese caso $z_n \nrightarrow 0$).

Para series $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, se verifica que $\sum a_n$ converge si y sólo si $\{s_n\}$ está acotada ($s_n = a_1 + \cdots + a_n$).

Si una serie converge absolutamente toda reordenación también converge absolutamente y tiene la misma suma.

Si una serie converge toda serie obtenida por introducción de paréntesis (esto es, agrupamiento de algunos de sus términos) también converge y tiene la misma suma. La supresión de paréntesis en una serie puede hacerle perder la convergencia. Desde luego esto no ocurre con series de términos mayores o iguales que 0.

Se define la suma de dos series $\sum z_n + \sum w_n = \sum(z_n + w_n)$ y se verifica que si $\sum z_n$ y $\sum w_n$ convergen entonces $\sum(z_n + w_n)$ también converge y su suma es la suma de las series.

Se define el producto $\lambda \sum z_n = \sum \lambda z_n$ siendo λ un número complejo y se verifica que si $\sum z_n$ converge entonces $\sum \lambda z_n$ también converge y su suma es λ por la suma de la serie.

La definición de producto de dos series $\sum z_n$ y $\sum w_n$ no es muy clara a primera vista si uno quiere que el producto de las series dadas, si son convergentes, sea una serie convergente y converja al producto de lo que convergían las series de partida. Esto sucede si definimos el producto $(\sum z_n)(\sum w_n)$ como la serie $\sum v_n$, donde

$$\begin{aligned} v_1 &= z_1 w_1 \\ v_2 &= z_1 w_2 + z_2 w_2 + z_2 w_1 \\ v_3 &= z_1 w_3 + z_2 w_3 + z_3 w_3 + z_3 w_2 + z_3 w_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Obsérvese que con esta definición de los v_n resulta que las sumas parciales c_n de esta serie son precisamente los productos de las sumas parciales s_n y t_n de las series $\sum z_n$ y $\sum w_n$. Por ejemplo,

$$c_2 = v_1 + v_2 = z_1 w_1 + z_1 w_2 + z_2 w_2 + z_2 w_1 = (z_1 + z_2)(w_1 + w_2) = s_2 t_2.$$

Es claro entonces que la sucesión de sumas parciales $\{c_n\}$ converge y lo hace a st, siendo $s = \textit{lím}\ s_n$ y $t = \textit{lím}\ t_n$. Si ahora hacemos lo mismo con las series $\sum |z_n|$ y $\sum |w_n|$, la correspondiente serie producto $\sum v_n$ tendrá todos sus términos mayores o iguales que 0 y podremos reordenarla como queramos manteniendo su convergencia. Si consideremos en ella la reordenación

$$|z_1||w_1| + |z_1||w_2| + |z_2||w_1| + |z_1||w_3| + |z_2||w_2| + |z_3||w_1| + \cdots$$

y después introducimos paréntesis de la siguiente forma:

$$|z_1||w_1| + (|z_1||w_2| + |z_2||w_1|) + (|z_1||w_3| + |z_2||w_2| + |z_3||w_1|) + \cdots$$

la correspondiente serie es convergente. Esta es la motivación para definir el producto de Cauchy de dos series $\sum z_n$ y $\sum w_n$ como la serie $\sum v_n^*$, siendo

$$\begin{aligned} v_1^* &= z_1 w_1 \\ v_2^* &= z_1 w_2 + z_2 w_1 \\ v_3^* &= z_1 w_3 + z_2 w_2 + z_3 w_1 \\ &\dots \\ v_n^* &= \sum_{k=1}^{n} z_k w_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Lo que se acaba de hacer muestra que esta serie es absolutamente convergente cuando $\sum z_n$ y $\sum w_n$ lo son. En general el producto de Cauchy de dos series convergentes no es convergente. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se considera el producto de Cauchy de la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ por si misma.

Tema 2

Derivación de funciones complejas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sean S un subconjunto de $\mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$, $z_0 \in S'$ y $w_0 \in \mathbb{C}$. Se dice que f tiene por límite w_0 en z_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \mid \forall z \in S, z \neq z_0, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Se escribe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ para indicar que f *tiene límite* en z_0 y que ese límite es w_0.

Límite por sucesiones: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ si y sólo si para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de S, $z_n \neq z_0$ para todo n, que converja a z_0 se verifica que $f(z_n) \to w_0$.

Las funciones con valores complejos, como lo son todas las que manejaremos aquí, se pueden escribir en la forma

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z).$$

Pues bien,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = a \quad \text{y} \quad \lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = b.$$

Suele usarse la notación $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, entonces $f = u + iv$.

Conviene también introducir los siguientes conceptos relacionados con el anterior:

Sea $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
a) Se dice que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si

$$\forall M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \mid \forall z \in S, \;\; z \neq z_0, \;\; |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

b) Se dice que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$ si

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N > 0 \mid \;\; \forall z \in S, \;\; |z| > N \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

c) Se dice que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si

$$\forall M > 0 \;\; \exists\, N > 0 \mid \;\; \forall z \in S, \;\; |z| > N \Longrightarrow |f(z)| > M.$$

Funciones continuas

Definición 2.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$. Se dice que una función $f : S \to \mathbb{C}$ es continua en un punto $z_0 \in S$ si*

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \mid \forall z \in S, \;\; |z - z_0| < \delta \Longrightarrow \;\; |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Continuidad por sucesiones: f es continua en z_0 si y sólo si para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de S, que converja a z_0 se verifica que $f(z_n) \to f(z_0)$.

Se verifica que f es continua en $z_0 \in S' \cap S$ si f tiene límite en z_0 y éste es precisamente $f(z_0)$.

Una función $f : S \to \mathbb{C}$ es continua en S (esto es, en cada punto de S) si y sólo si para todo abierto V de $\mathbb{C}$ existe un abierto U de $\mathbb{C}$ tal que $f^{-1}(V) = U \cap S$.

Cuando dos funciones continuas pueden componerse, su composición es también continua. La suma de funciones continuas en un punto es continua en ese punto y también lo es su producto y el producto de una función continua por un número complejo. Si la función f no se anula en ningún punto y es continua en un punto z_0 entonces la función $\frac{1}{f}$ también es continua en z_0.

Las funciones constantes y las funciones $f(z) = z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = \bar{z}$ y $f(z) = z^2$ son continuas en todo punto.

Se verifica que $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ es continua en un punto z_0 si y sólo si las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en z_0.

La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto y la de un conjunto conexo es también un conjunto conexo.

Definición 2.2 *Se dice que una función $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua en S si*

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \mid \forall z, w \in S, \;\; |z - w| < \delta \;\; \Longrightarrow \;\; |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Las funciones constantes y las funciones $f(z) = z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = \overline{z}$ son uniformemente continuas en $\mathbb{C}$ y la función $f(z) = z^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{C}$: Dado $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ arbitrario, los puntos $\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{3}$ y $\frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{3}$ distan entre sí menos que δ y sin embargo sus cuadrados distan $\frac{4}{3} > 1$.

Toda función uniformemente continua en un conjunto S es continua en cada punto de S y toda función continua es uniformemente continua y alcanza el supremo (de sus valores absolutos) en cualquier compacto contenido en su conjunto de definición.

Sucesiones de funciones

Una sucesión de funciones de $S \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ en el conjunto de funciones de S en $\mathbb{C}$. Como es habitual se representa a las sucesiones de funciones por $\{f_n\}$.

Definición 2.3 *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge puntualmente en el conjunto S a una función $f : S \to \mathbb{C}$ si $\forall z \in S$ se verifica que $f_n(z) \to f(z)$. Esto es,*

$$\forall z \in S \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu(z, \varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Si una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge puntualmente en el conjunto S a una función f y una sucesión de funciones $\{g_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge puntualmente en el conjunto S a una función g entonces la sucesión de funciones $\{f_n + g_n\}$ converge puntualmente en el conjunto S a la función $f + g$. Lo mismo sucede con el producto y el cociente cuando las funciones del denominador nunca valen 0.

Definición 2.4 *La sucesión de funciones $\{f_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge uniformemente en el conjunto S a una función $f : S \to \mathbb{C}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu, \Longrightarrow \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall z \in S.$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de S en $\mathbb{C}$ y sea f una función de S en $\mathbb{C}$. Si existe una sucesión de números reales $\{a_n\}$ convergente a cero verificando que $|f_n(z) - f(z)| \leq a_n$ para todo n y para todo $z \in S$ entonces la convergencia es uniforme.

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones: Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge uniformemente en el conjunto S si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq \nu,\ \Longrightarrow |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon \ \forall z \in S.$$

El límite uniforme de funciones continuas es una función continua. El límite puntual puede no ser una función continua.

Si una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge uniformemente en el conjunto S a una función f y una sucesión de funciones $\{g_n\}$ de S en $\mathbb{C}$ converge uniformemente en el conjunto S a una función g entonces la sucesión de funciones $\{f_n + g_n\}$ converge uniformemente en el conjunto S a la función $f + g$, y si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\{\lambda f_n\}$ converge a λf uniformemente, pero $\{f_n g_n\}$ puede no ser uniformemente convergente. Esto sucede, por ejemplo, cuando $f_n(z) = \frac{1}{n}$ y $g_n(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pues la sucesión $\{\frac{1}{n}z\}$ no es uniformemente convergente en $\mathbb{C}$.

Series de funciones

Las series de funciones son pares formados por dos sucesiones, $\{f_n\}$ y $\{s_n\}$, donde cada f_n es una función de $S \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, y s_n es la función de S en $\mathbb{C}$ definida por $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Se usará la notación $\sum f_n$ para representar la serie de funciones definida por la sucesión $\{f_n\}$.

La convergencia puntual o uniforme de las series de funciones se define así: Una serie $\sum f_n$ converge puntualmente en el conjunto S a una función s de S en $\mathbb{C}$ si la sucesión de funciones $\{s_n\}$ converge puntualmente a la función s en el conjunto S, esto es, para cada $z \in S$, $s_n(z) \to s(z)$. La convergencia de $\sum f_n$ a la función s es uniforme en el conjunto S si la sucesión $\{s_n\}$ converge uniformemente a la función s en el conjunto S. Cometiendo un abuso de notación se representa por $\sum f_n$ tanto a la serie como a su límite puntual (suma) cuando éste exista.

Si una serie $\sum f_n$ converge puntualmente (uniformemente) en el conjunto S entonces la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente (uniformemente) a la función cero en el conjunto S.

Respecto a la convergencia uniforme de series de funciones debemos citar:

Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie de funciones: Una serie de funciones $\sum f_n$ de S en $\mathbb{C}$ converge uniformemente en el conjunto S si y sólo si

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon &> 0 \ \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \in \mathbb{N},\ q > p \geq \nu, \\ &\Longrightarrow |f_{p+1}(z) + \cdots + f_q(z)| < \varepsilon \ \forall z \in S.\end{aligned}$$

Criterio M de Weierstrass: Si $\sum f_n$ es una serie de funciones de S en $\mathbb{C}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n > 0$ de forma que $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in S$ y la serie numérica $\sum M_n$ converge, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

Funciones derivables

Sea S un subconjunto de $\mathbb{C}$, una función $f : S \to \mathbb{C}$ se dice *derivable* en un punto $z_0 \in S \cap S'$ si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y es un número complejo. El valor de este límite, cuando exista, se llama la derivada de f en z_0 y se denota por $f'(z_0)$.

La función $f(z) = z$ es derivable en todo punto de $\mathbb{C}$, mientras que la $g(z) = \overline{z}$ no lo es en ningún punto (en efecto, si tomamos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y consideramos puntos de la forma $z = z_0 + t,\ z = z_0 + it$ con $t \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0} = 1$ y $\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0} = -1$ respectivamente). Tampoco son derivables las funciones $|z|, \operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$.

Idea geométrica: si suponemos que f es derivable en 0 y que $f(0) = 0$ (para simplificar), el que f sea derivable en el 0 significa que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \simeq \lambda z$ para z próximo a 0. Entonces, lo que hace f es multiplicar a los z próximos a 0 por un número complejo fijo, lo que significa que los escala y los gira un mismo ángulo a todos.

Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

Si f y g son dos funciones derivables en un punto z_0 también lo es su suma y su producto;

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Si además $g(z) \neq 0$ en los puntos de un entorno de z_0, entonces $\frac{f}{g}$ es también derivable en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Regla de la Cadena: $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$, supuesto, que f sea derivable en z_0, que g lo sea en $f(z_0)$ y que tenga sentido componer a f con g.

En el caso particular de que el conjunto S sea de números reales entonces escribimos $f(t) = u(t) + iv(t)$ y se verifica que f es derivable en un punto t_0 si y sólo si u y v son derivables en dicho punto. Además, $f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$.

Teorema 2.5 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann) *Sea $f = u+iv : U \to \mathbb{C}$, U abierto de $\mathbb{C}$, una función. Entonces f es derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ si y sólo si u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0) como funciones definidas de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (el propio U) con valores en $\mathbb{R}$ y además se verifica que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Estas igualdades se llaman las **ecuaciones de CauchyRiemann**.

Demostración. Veamos la demostración de esto: Supongamos que f es derivable en z_0, y sea $f'(z_0) = a + ib$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

lo que equivale a que

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = 0$$

y a su vez a que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

lo que significa que

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{a(x-x_0) - b(y-y_0) + i(a(y-y_0) + b(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

es 0, esto es,

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) - (a(x-x_0) + (-b)(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

y

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0) - (a(y-y_0) + b(x-x_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0,$$

lo que nos dice que u es diferenciable en (x_0, y_0), que $du(x_0, y_0)(h, k) = ah - bk$, que v es diferenciable en (x_0, y_0) y que $dv(x_0, y_0)(h, k) = bh + ak$. De ello se deduce que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Todos los pasos que hemos dado se pueden hacer en sentido inverso y así tenemos el resultado anunciado. □

Obsérvese que en la anterior demostración se ha probado además que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Definición 2.6 *Sean U un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una aplicación definida en U con valores en $\mathbb{C}$. Se dice que f es* ***holomorfa*** *en U si es derivable en cada punto de U.*

Observamos que si u y v tienen derivadas parciales primeras continuas en U entonces son diferenciables en U y por lo tanto, si verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, $f = u + iv$ es holomorfa en U.

El conjunto de las funciones holomorfas en un abierto U de $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial con las operaciones habituales: $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ y $(\lambda f)(z) = \lambda f(z)$, $z \in U$. (f y g son funciones holomorfas en U y λ es un número complejo). Este espacio se denotará por $\mathcal{H}(U)$.

Tema 3

Series de potencias y radio de convergencia. Funciones analíticas. Principio de identidad. Funciones elementales

Definición 3.1 *Se llama **serie de potencias** centrada en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ a toda serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ en la que las funciones f_n son de la forma:*

$$f_0(z) = a_0, \;\; f_1(z) = a_1(z - z_0), ..., \;\; f_n(z) = a_n(z - z_0)^n ...$$

donde los a_j son números complejos. Las series de potencias se denotan habitualmente por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Observamos que todas las f_n son derivables en todo punto de $\mathbb{C}$ y que $f_0'(z) = 0$ y $f_n'(z) = na_n(z - z_0)^{n-1}$ para todo $n = 1, 2...$

Definición 3.2 *Se llama **radio de convergencia** de una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

al elemento de $[0, +\infty) \cup \{\infty\}$ definido por:

$$R = \begin{cases} 0 & si \; \overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \infty & si \; \overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|}} & si \; 0 < \overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty. \end{cases}$$

Teorema 3.3 *(de Cauchy-Hadamard) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias y sea R su radio de convergencia, $0 < R < \infty$, entonces para cada $z_1 \in D(z_0, R)$ la serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ converge absolutamente y para $z_1 \notin \overline{D}(z_0, R)$ la serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ no converge.*

Demostración. Aplicamos el criterio de la raíz a la serie de números reales no negativos $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1-z_0)^n|$ para cada $z_1 \in D(z_0, R)$:

$$\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n(z_1-z_0)^n|} = (\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|})|z_1-z_0| < (\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|})R = 1$$

y para cada $z_1 \notin \overline{D}(z_0, R)$

$$\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n(z_1-z_0)^n|} = (\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|})|z_1-z_0| > (\overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|})R = 1$$

y se obtiene el resultado. □

Para ver que no se puede afirmar nada de lo que le ocurre a los puntos z tales que $|z-z_0| = R$ basta observar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ tiene radio de convergencia 1, converge en el punto -1 y no lo hace en el 1.

Teorema 3.4 *Toda serie de potencias centrada en z_0 que tiene radio de convergencia R, $0 < R < \infty$ converge de modo uniforme en los compactos de $D(z_0, R)$.*

Demostración. Si K es un compacto contenido en $D(z_0, R)$ entonces definimos la función $\varphi(z) = |z-z_0|$, que es continua en el compacto K, y por lo tanto existe $z^* \in K$ tal que $\varphi(z) \leq \varphi(z^*)$ para todo $z \in K$.(nótese que el supremo de $\varphi(K)$ es un punto adherente al conjunto y pertenece a él pues $\varphi(K)$ es cerrado por ser compacto). En consecuencia

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n(z^*-z_0)^n| \quad \forall z \in K, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z^*-z_0)^n|$ converge, pues $z^* \in K \subset D(z_0, R)$, aplicando el criterio M de Weierstrass se tiene el resultado. □

En el caso $R = \infty$ la serie converge absolutamente en todos los números complejos y de modo uniforme en cada compacto de $\mathbb{C}$. Si $R = 0$ la serie no converge en ningún punto salvo en z_0 y su valor en él es a_0.

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ cuyo radio de convergencia R suponemos mayor que 0 y finito, podemos considerar la función $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

téngase en cuenta que por cada $z \in D(z_0, R)$, la correspondiente serie numérica converge.

Teorema 3.5 (de derivación de series de potencias) *La función f definida de la forma anterior es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $D(z_0, R)$.*

Demostración. Veamos primero como es derivable en cada punto de $D(z_0, R)$. Probaremos que para todo $z_1 \in D(z_0, R)$, se verifica que

$$f'(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}.$$

Observamos antes de nada que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que la que define a f, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = (z - z_0)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$$

y $\overline{lím} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{lím} \sqrt[n]{|a_n|}$ debido a que $n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Fijemos $z_1 \in D(z_0, R)$. Probaremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D(z_0, R)$ y $0 < |z - z_1| < \delta$ entonces:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1} \right| < \varepsilon.$$

Fijemos $r > 0$ tal que $|z_1 - z_0| < r < R$. Como la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}$ es convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para $z \in D(z_0, R)$, $z \neq z_1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1} \right| \\
= \; & \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1} \right| \\
\leq \; & \left| \frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n (z - z_0)^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n (z_1 - z_0)^n}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{n_0} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1} \right| \\
& + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n - (z_1 - z_0)^n}{z - z_1} \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1} \right|.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{n_0} na_n(z_1-z_0)^{n-1}$ es la derivada de la función $s_{n_0}(z)=\sum_{n=0}^{n_0} a_n(z-z_0)^n$ en z_1, existe un $\delta>0$, tal que $D(z_1,\delta)\subset D(z_0,r)$, de forma que para todo punto $z\in D(z_1,\delta)$, $z\neq z_1$, se tiene que:

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n(z-z_0)^n-\sum_{n=0}^{n_0} a_n(z_1-z_0)^n}{z-z_1}-\sum_{n=1}^{n_0} na_n(z_1-z_0)^{n-1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que para cualesquiera números complejos u,v y $n\in\mathbb{N}$ se verifica que

$$u^n-v^n=(u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^{n-1-k}v^k,$$

se sigue que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|\left|\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1}\right|\\
=&\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|\left|(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z_1-z_0)+\cdots+(z_1-z_0)^{n-1}\right|\\
\leq&\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|nr^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

y finalmente, $\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1}\right|\leq \displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|nr^{n-1}<\frac{\varepsilon}{3}$. Luego,

$$\left|\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1}\right|<\varepsilon\qquad\forall z,\ 0<|z-z_1|<\delta.$$

Observamos ahora que la derivada es entonces una nueva serie de potencias con centro en z_0 cuyo radio de convergencia es el radio R de la serie de partida. Luego esta derivada será derivable en cada punto de $D(z_0,R)$ y así sucesivamente. En consecuencia la serie de potencias original define una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $D(z_0,R)$. Si denotamos por f a la función definida por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $D(z_0,R)$, entonces

$$f^{k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))a_n(z-z_0)^{n-k}$$

con lo que

$$f^{k)}(z_0)=k!a_k.$$

Para $R=\infty$ podemos definir la función f en todo $\mathbb{C}$ y de manera análoga se verifica que es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{C}$ así como las fórmulas para las derivadas. $\square$

Definición 3.6 *Se dice que una aplicación $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica en un punto $z_0 \in U$, U abierto de $\mathbb{C}$, si existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y existe un $D(z_0,\rho) \subset U$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0,\rho).$$

Como acabamos de ver $a_n = \frac{1}{n!} f^{n)}(z_0)$ con lo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(z_0)(z-z_0)^n.$$

Esta serie suele llamarse la **serie de Taylor** de f en z_0.

La suma de funciones analíticas en un punto z_0 es también una función analítica en el punto z_0 y lo mismo sucede con el producto de una función analítica por un número complejo y con el producto de funciones analíticas. La serie que corresponde a la función producto es el producto de Cauchy de las series que corresponden a cada una de las funciones.

Las funciones analíticas en un abierto U son las que son analíticas en todos los puntos de U y se denota por $\mathcal{A}(U)$ al conjunto de todas ellas. Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Las funciones definidas por una serie de potencias en su disco de convergencia son analíticas en él. Esto no es una trivialidad, pues hay que demostrar que dado un punto $z_1 \in D(z_0,r)$ existe una serie de potencias centrada en z_1 que converge a la función en un disco centrado en z_1. Lo que ocurre es que en el caso complejo, que es el que nos interesa a nosotros, esto está garantizado por el resultado, que se probará más adelante, de que todas las funciones derivables en un abierto son analíticas en él.

Acabamos de ver que las funciones analíticas de variable compleja son de clase $\mathcal{C}^\infty$ (tiene derivadas de todos los órdenes en todos los puntos de U). Esto ocurre también en el caso real, pero en este caso sucede que no todas las funciones de clase infinito son analíticas. Ej.: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ (véase Spivak, p. 482, Bartle p. 341). En el caso complejo toda función que sea holomorfa en (derivable en todo punto de) U es analítica en ese abierto. Esto es una consecuencia muy importante del teorema integral de Cauchy que vamos a obtener un poco más adelante. Demostramos ahora un teorema para funciones analíticas, que es válido tanto en el caso real como en el complejo.

Teorema 3.7 (Primer teorema de identidad) *Sea U un dominio de $\mathbb{C}$ (esto significa que U es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$) y sea f una función analítica en U. Entonces equivalen:*

1. *f es idénticamente nula en U.*
2. *Existe un abierto no vacío $V \subset U$ tal que f es idénticamente nula en V.*

3. Existe un punto $z_0 \in U$ tal que $f^{n)}(z_0) = 0$ para $n = 0, 1, 2...$ ($f^{0)} = f$).

Demostración. Es claro que (1) $\Longrightarrow$ (2), basta tomar $V = U$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Consideremos cualquier punto $z_0 \in V$. Dado que f se anula en todos los puntos de un cierto disco centrado en z_0, resulta que $f^{n)}(z_0) = 0$ para $n = 0, 1, 2...$ Para verlo no hay más que escribir los cocientes cuyos límites definen las derivadas sucesivas de f en z_0.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Sea $S = \{z \in U : f^{n)}(z) = 0 \text{ para } n = 0, 1, 2...\}$. El conjunto S es abierto, pues si $z_1 \in S$ entonces $z_1 \in U$ y al ser la función f analítica en z_1, existe $\rho > 0$ tal que $D(z_1, \rho) \subset U$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n \quad \forall z \in D(z_1, \rho)$$

entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in D(z_1, \rho)$ pues $f^{n)}(z_1) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2...$ Luego $D(z_1, \rho) \subset S$. El conjunto $\mathbb{C} \backslash \overline{S}$ es también abierto, pues es el complementario de un cerrado.

Tenemos entones dos conjuntos abiertos S y $\mathbb{C} \backslash \overline{S}$ tales que:

a) $U \cap S \cap (\mathbb{C} \backslash \overline{S}) = \emptyset$ (nótese que si $z \in S$ entonces $z \in \overline{S}$ por lo que $z \notin \mathbb{C} \backslash \overline{S}$.

b) $U \subset (\mathbb{C} \backslash \overline{S}) \cup S$. Veámoslo, si $z \in U$ y $z \notin \mathbb{C} \backslash \overline{S}$, entonces $z \in \overline{S}$ y por lo tanto existe $\{z_k\} \subset S$ tal que $z_k \to z$. En consecuencia, al ser cada $f^{n)}$ continua, $f^{n)}(z) = \lim_{k \to \infty} f^{n)}(z_k) = 0$, para $n = 0, 1...$, es decir, $z \in S$.

c) $U \cap S \neq \emptyset$. Esto es claro pues $z_0 \in U \cap S$.

Como U es conexo se tiene que verificar que $U \cap (\mathbb{C} \backslash \overline{S}) = \emptyset$, y como por (*b*), $U \subset (\mathbb{C} \backslash \overline{S}) \cup S$, resulta que $U \subset S$ y por lo tanto $U = S$.

$\square$

Corolario 3.8 *Si dos funciones analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ coinciden en un abierto no vacío V de él, entonces coinciden en todo U.*

Corolario 3.9 *El anillo de las funciones analíticas en un domino U no tiene divisores de 0.*

En efecto, si f y g son dos funciones analíticas en U, $fg = 0$ y f no es idénticamente 0, entonces existe un punto z_0 tal que $f(z_0) \neq 0$, pero entonces, por la continuidad de f existe un abierto $V \subset U$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in V$. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo resulta que $g(z) = 0$ para todo $z \in V$. Entonces g es idénticamente nula en U.

Teorema 3.10 *(Segundo teorema de identidad) Sean U un dominio, f una función analítica en U y supongamos que para algún punto $z_0 \in U$ existe una sucesión $\{z_k\}$ de puntos de U, todos distintos de z_0, que converge a z_0 y de forma que $f(z_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces f es idénticamente nula en U. Esto es, si $\{z \in U : \ f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación en U entonces f es idénticamente nula en U.*

Demostración. Consideremos el desarrollo de f en serie de Taylor en torno a z_0 :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ \ z\in D(z_0,\rho) \text{ para algún } \rho>0.$$

Probaremos que $f^{n)}(z_0)=0$ para todo $n=0,1...$ lo que nos da el resultado usando el primer teorema de identidad. Dado que $f(z_k)=0$ para todo k, por la continuidad de f se sigue que también $f(z_0)=0$. Supongamos que existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $f^{m)}(z_0)\neq 0$ y denotemos por m_0 al primer natural con esa propiedad (éste m_0 existe por el Principio de Buena Ordenación de $\mathbb{N}$). Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m_0}^{\infty}\frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \\ &= (z-z_0)^{m_0}\left[\frac{f^{m_0)}(z_0)}{m_0!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{m_0+k)}(z_0)}{(m_0+k)!}(z-z_0)^k\right],\ z\in D(z_0,\rho). \end{aligned}$$

La función

$$z\in D(z_0,\rho)\mapsto \frac{f^{m_0)}(z_0)}{m_0!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{m_0+k)}(z_0)}{(m_0+k)!}(z-z_0)^k$$

es continua (está definida por una serie de potencias en ese disco) y su valor en los puntos z_k, que están contenidos en $D(z_0,\rho)$,es 0, luego su valor en z_0 también es 0, pero ese valor es $\frac{f^{m_0)}(z_0)}{m_0!}$ que supusimos que no era 0. Esta contradicción nos da el resultado. □

Corolario 3.11 *Si dos funciones analíticas en un dominio U coinciden en los puntos de una sucesión convergente a un punto de U, cuyos términos son todos distintos de ese punto, entonces coinciden en todo U.*

Corolario 3.12 *Si f es una función analítica que no sea la constante 0 en un dominio U. Entonces para todo $z_0\in U$ tal que $f(z_0)=0$ existe $r>0$ tal que $\overline{D}(z_0,r)\subset U$ y $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\overline{D}(z_0,r)\backslash\{z_0\}$.*

Demostración. Sea $\rho>0$ tal que $\overline{D}(z_0,\rho)\subset U$. Si para cada $k\in\mathbb{N}$ existe un punto $z_k\in\overline{D}(z_0,\frac{\rho}{k})\backslash\{z_0\}$ tal que $f(z_k)=0$ aplicamos el teorema anterior y tenemos que f es la constante cero en U, luego existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\overline{D}(z_0,\frac{\rho}{k_0})\backslash\{z_0\}$.
□

Observamos que la función $f:z\in\mathbb{C}\to f(z)=1-|z|$, vale 0 en el 1 y en cualquier entorno del 1 hay puntos donde vale 0, pero claro, esta función, al no ser holomorfa, no es analítica (aunque sí continua).

Definición 3.13 *Sea $f:U\to\mathbb{C}$, analítica en un punto $z_0\in U$. Se dice que f tiene en z_0 un cero de orden $m\in\mathbb{N}$ si $f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\dots,\ f^{m-1)}(z_0)=0$ y $f^{m)}(z_0)\neq 0$.*

La siguiente proposición se demuestra fácilmente.

Proposición 3.14 *Una función analítica en z_0 tiene en ese punto un cero de orden m si y sólo si existen $\delta > 0$ y una función ψ analítica en z_0 tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^m \psi(z) \quad y \quad \psi(z) \neq 0 \textit{ para todo } z \in D(z_0, \delta).$$

Obsérvese que

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(z_0)(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+k)!} f^{m+k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

para todo $z \in D(z_0, \delta)$.

Las funciones elementales

Consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Esta serie es convergente en todo punto de $\mathbb{C}$. Nótese que, por cada $z \in \mathbb{C}$ la serie numérica real $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n$ es convergente pues,

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1}$$

tiene límite 0 (se aplica el criterio del cociente). Recordamos que si $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, también $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. Podemos entonces considerar la función

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots + \frac{1}{n!} z^n \right)$$

que de momento denotaremos por E. Dado que la función E, está definida por una serie de potencias en $\mathbb{C}$, resulta que es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{C}$ y

$$E'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

para todo punto de $\mathbb{C}$. Esto es $E'(z) = E(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si consideramos dos puntos z y $w \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} E(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \right) \\ &= E(z)E(w). \end{aligned}$$

NOTA. La penúltima igualdad anterior es la fórmula que define el producto de Cauchy de las dos series.

De la propiedad $E(z+w) = E(z)E(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$, la más importante de la función, se deduce que $E(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pues

$$E(z)E(-z) = E(z + (-z)) = E(0) = 1.$$

En el caso de $z = x \in \mathbb{R}$ se verifica que $E(x) = e^x$ y entonces se utiliza la notación

$$e^z = E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Podemos definir también las funciones:

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Estas funciones son de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{C}$ y se comprueba fácilmente que $s(-z) = -s(z)$, que $c(-z) = c(z)$ y que $s'(z) = c(z)$ y $c'(z) = -s(z)$. También se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = c(z) + is(z) = e^{iz} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

con lo que

$$e^{-iz} = c(z) + is(-z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

de donde se siguen las fórmulas de Euler (de 1748):

$$c(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Para $z = x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$s(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

y

$$c(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

y entonces se utiliza la notación

$$\text{sen } \ z = s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

y

$$\cos \ z = c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

De la expresión $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ se obtiene, tomando $z = \pi$, la famosa fórmula

$$e^{i\pi} = -1 \text{ o su equivalente } e^{i\pi} + 1 = 0$$

que relaciona los números más "famosos" de las matemáticas.

Para cada $y \in \mathbb{R}$ se verifica que $|e^{iy}| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = 1$.

Se verifica también que

$$e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i \text{ para algún } k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

En efecto, si $e^z = 1$, entonces $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen}\ y) = 1$, luego

$$\begin{aligned} e^x \cos \ y &= 1 \\ e^x \operatorname{sen} \ y &= 0. \end{aligned}$$

Como $e^x \neq 0$, se sigue de la segunda ecuación que $y = n\pi$, para algún $n \in \mathbb{Z}$. Dado que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, necesariamente n debe ser de la forma $2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, y $e^x = 1$, por lo que $x = 0$. La otra implicación es inmediata pues $\cos(2k\pi) = 1$ y $\operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De la equivalencia que acabamos de obtener se sigue que

$$e^z = e^w \Longleftrightarrow \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } z - w = 2k\pi i.$$

También se definen el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico de manera análoga al caso real $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ y $\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$.

En los cursos de Análisis de Variable Real se define la función logaritmo (de variable real) como la inversa de la función exponencial. Nótese que la función $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$ es inyectiva y su imagen es $(0, +\infty)$, luego la función logaritmo (natural) real está definida en la semirrecta real positiva, $(0, +\infty)$. Como ya hemos visto la función exponencial compleja no es inyectiva y entonces no se puede definir una inversa para tal función. Sin embargo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.15 *Para todo número complejo z, $z \neq 0$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = z$. Uno de tales w es $\log|z| + i \operatorname{Arg}\ z$. Los demás son $\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

$\operatorname{Arg} z$ es el llamado **argumento principal de** z y es el único número real θ entre $[-\pi, \pi)$ tal que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen} theta).$$

Nótese que $\frac{z}{|z|}$ es un número complejo de módulo 1 y por lo tanto es un punto que está sobre la circunferencia unidad por lo que existe un (único) θ entre $[-\pi, \pi)$ tal que $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\operatorname{sen}\theta$ (esto se vio cuando se habló de los números complejos al principio del curso).
Demostración.

$$e^{\log|z| + i \operatorname{Arg}\ z} = e^{\log|z|}e^{i \operatorname{Arg}\ z} = |z|(\cos\ \operatorname{Arg}(z) + i \operatorname{sen}\ \operatorname{Arg}(z)) = z.$$

Por otra parte, si $e^w = z$ entonces

$$e^w = z = e^{\log|z| + i \operatorname{Arg}\ z}$$

con lo que, como hemos visto, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = \log|z| + i \operatorname{Arg}\ z + 2k\pi i.$$

$\square$

Definición 3.16 *Cada uno de los números complejos $\log|z| + i \operatorname{Arg}\ z + 2k\pi i$, $(k \in \mathbb{Z})$ se llamará un valor del logaritmo de z ($z \neq 0$). El valor correspondiente a $k = 0$ se llama el valor principal y se denotará por $\operatorname{Log}\ z$.*

Definición 3.17 *Sean S un subconjunto de $\mathbb{C}$ (no necesariamente abierto) y una función continua f de S en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

a) Se llama *determinación continua del logaritmo de f en S* a cualquier función continua $g : S \to \mathbb{C}$ tal que

$$e^{g(z)} = f(z) \ \forall z \in S.$$

b) Se llama *determinación continua del argumento de f en S* a cualquier función continua $\theta : S \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = |f(z)|e^{i\theta(z)} \ \forall z \in S.$$

Obsérvese que si g es una determinación continua del logaritmo de f en S, entonces $\operatorname{Im} g$ es una determinación continua del argumento de f en S y que si θ es una determinación continua del argumento de f en S entonces $z \mapsto \log|f(z)|+i\theta(z)$ es una determinación continua del logaritmo en S.

Cuando $f(z) = z$ se habla de determinaciones continuas del logaritmo en S.

En el conjunto $\mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \leq 0, \ y = 0\}$ las funciones Log y Arg son determinaciones continuas del logaritmo y del argumento respectivamente. Es suficiente probar la continuidad de Arg en los puntos de la circunferencia unidad, excluido el $-1+0i$, que no está en S. Téngase en cuenta que la aplicación

$$z \in \mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \leq 0, \ y = 0\} \mapsto \frac{z}{|z|}$$

es continua y que $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(\frac{z}{|z|}$. Fijemos entonces un punto z_0 de la circunferencia unidad distinto del -1 y escribamos z_0 como $z_0 = e^{i \operatorname{Arg} \ z_0}$, nótese que $\operatorname{Arg} \ z_0 \in (-\pi, \pi)$. Dado $\varepsilon > 0$, que tomaremos bastante pequeño para que

$$-\pi < \operatorname{Arg} \ z_0 - \varepsilon < \operatorname{Arg} \ z_0 + \varepsilon < \pi.$$

Sea

$$K = \{e^{it} : -\pi \leq t \leq \operatorname{Arg} \ z_0 - \varepsilon\} \cup \{e^{it} : \operatorname{Arg} \ z_0 + \varepsilon \leq t \leq \pi\}.$$

Este conjunto K es cerrado y $e^{i \operatorname{Arg} z_0}$ no pertenece a él, luego existe un $\delta > 0$ tal que si $|z| = 1$ y $|z - e^{iArg \ z_0}| < \delta$ entonces $z \notin K$ (Si un punto no está en un cerrado, ese punto no es adherente a él). En consecuencia, para esos z se verifica que $z = e^{iArg \ z}$ con $\operatorname{Arg} \ z \in (\operatorname{Arg} z_0 - \varepsilon, \operatorname{Arg} z_0 + \varepsilon)$, esto es, $|\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z_0| < \varepsilon$ lo que prueba la continuidad en z_0 de la restricción de Arg a $\{z : |z| = 1, z \neq (-1, 0)\}$.

Estas funciones no son determinaciones continuas del *Log* y el *Arg* en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ pues no son continuas en los puntos de la forma $(x, 0)$ con $x < 0$. Obsérvese que esos puntos tiene argumento principal igual a $-\pi$ y los puntos de la forma $(x, \frac{1}{n})$ con $x < 0$, tienen argumento principal próximo a π.

Teorema 3.18 *Cualesquiera dos determinaciones continuas del logaritmo de una función f en un subconjunto conexo S se diferencian en un múltiplo entero de $2\pi i$.*

Demostración. Sean g_1 y g_2 dos determinaciones continuas del logaritmo de f en S (esto es, $e^{g_1} = f$ y $e^{g_2} = f$). Entonces,

$$e^{(g_1-g_2)(z)} = 1$$

para todo $z \in S$, por lo que, para todo $z \in S$ existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tal que $(g_1-g_2)(z) = 2\pi i \cdot k(z)$. Como $g_1 - g_2$ es una función continua en un conjunto conexo que toma sólo valores enteros necesariamente es constante. Esto es, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g_1 - g_2 = 2\pi i \cdot k$. $\square$

Teorema 3.19 *Se verifica que la función $g(z) = \operatorname{Log} z$, valor principal del logaritmo, es una función derivable en el conjunto abierto $U = \mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \leq 0, \ y = 0\}$. Además $g'(z) = \frac{1}{z}$ para cada $z \in U$.*

Demostración. Para cada $z_0 \in U$ y para cada sucesión $\{z_n\}$ de puntos de U convergente a z_0, con $z_n \neq z_0$, para todo n, probamos que existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0}$$

y su valor es $\frac{1}{z_0}$. Ahora bien, dado que la función $z \mapsto e^z$ es derivable en $g(z_0)$, $g(z_n) \neq g(z_0)$ para todo n (si $g(z_n) = g(z_0)$ entonces $z_n = e^{g(z_n)} = e^{g(z_0)} = z_0$ lo que no es posible) y g es continua en z_0, se tiene que existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{g(z_n)} - e^{g(z_0)}}{g(z_n) - g(z_0)}$$

y su valor es $e^{g(z_0)}$ que es distinto de 0. Esto nos da que existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{e^{g(z_n)} - e^{g(z_0)}}$$

y que vale $\frac{1}{e^{g(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$. $\square$

Consideremos ahora la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

Tiene radio de convergencia 1 por lo que la función

$$h(z) = \operatorname{Log} z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \quad z \in D(1,1)$$

es derivable en $D(1,1)$ (nótese que $D(1,1) \subset \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$), y

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n(z-1)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{1-(1-z)} = 0 \quad \forall z \in D(1,1). \end{aligned}$$

Esto implica que h es constante en $D(1,1)$ y como $h(1) = 0$ resulta que $h(z) = 0$ para todo $z \in D(1,1)$. De ello se deduce que

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \quad \forall z \in D(1,1).$$

Potencias de exponente complejo:

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ y para cada $w \in \mathbb{C}$ definimos la función $p_k^w(z) = e^{w(\operatorname{Log} z + 2\pi k i)}$ para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. En particular para $k = 0$ se tiene que $p_0^w(z) = e^{w(\operatorname{Log} z)}$, que suele denotarse por z^w y se le llama valor principal de la potencia w de z.

Si $w = n$ entonces $p_k^w(z) = z^n$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Si $w = -n$ entonces $p_k^w(z) = z^{-n}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
Si $w = \frac{1}{2}$ entonces $\{p_k^w(z) : k \in \mathbb{Z}\}$ son 2 complejos distintos.

Se verifica que la función p_k^w es derivable en el abierto

$$\mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \leq 0, \ y = 0\}$$

y su derivada $(p_k^w)'(z) = w p_k^{w-1}(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \leq 0, \ y = 0\}$.

Nota 3.20 *Puede ocurrir que $(e^z)^w$ no coincida con e^{zw}. Esto ocurre, por ejemplo, cuando $z = i\frac{5}{2}\pi$ y $w = i$, pues*

$$(e^z)^w = \left(e^{i\frac{5}{2}\pi}\right)^i = e^{iLog\left(e^{i\frac{5}{2}\pi}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

mientras que

$$e^{zw} = e^{i\frac{5}{2}\pi i} = e^{-\frac{5}{2}\pi}.$$

Tema 4

Integración de funciones complejas. Teoría elemental de Cauchy. Desigualdades de Cauchy y teorema de Liouville

Definición 4.1 *Llamaremos* ***curva*** *en un subconjunto S de $\mathbb{C}$ a cualquier aplicación continua γ definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ de la recta real ($a < b$) que tome sus valores en S. El conjunto $\gamma^* := \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ se llama la* ***traza*** *de γ. A $\gamma(a)$ se le llama punto inicial de la curva y a $\gamma(b)$ punto final. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva γ es* ***cerrada****.*

Se puede suponer que el intervalo en el que está definida la curva γ es el $[0,1]$, nótese que la aplicación $t \in [0,1] \mapsto \varphi(t) = a + t(b-a) \in [a,b]$ es biyectiva, continua, incluso es de clase $\mathcal{C}^\infty$, lleva 0 en a, 1 en b, y su inversa $s \in [a,b] \mapsto \frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$ tiene las mismas propiedades.

Definición 4.2 *Llamaremos* ***camino*** *en un subconjunto S de $\mathbb{C}$ a toda curva $\gamma : [a,b] \to S$ de forma que exista una partición*

$$\{t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$$

($a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$) de $[a,b]$ tal que para cada $j = 1, ..., n$ la restricción de γ al intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ sea de clase $\mathcal{C}^1$ en ese intervalo.

Ejemplo 4.3 *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ fijos. Entonces*

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

es un camino en $\mathbb{C}$, que no es otra cosa que la circunferencia (positivamente orientada) de centro z_0 y radio r. Usaremos la notación $\mathcal{C}(z_0, r)$.

Ejemplo 4.4 *Se llama* ***segmento de origen*** z_1 *y* ***extremo*** z_2 *al camino dado por*

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Este segmento se denotará por $L[z_1, z_2]$ o por $[z_1, z_2]$.

Ejemplo 4.5

$$\gamma : t \in [0,2] \mapsto \gamma(t) = \begin{cases} 1-t & si\ t \in [0,1] \\ (t-1)i & si\ t \in [1,2] \end{cases}$$

es un camino en $\mathbb{C}$*. Obsérvese que* γ *es continua en* $[0,2]$ *pero no es derivable en el punto* 1*, aunque sí lo son sus restricciones a* $[0,1]$ *y* $[1,2]$*, y además éstas son de clase* $\mathcal{C}^1$ *en esos intervalos.*

Definición 4.6 *Se dice que dos caminos* $\gamma : [a,b] \to S$ *y* $\beta : [c,d] \to S$ *(*S *subconjunto de* $\mathbb{C}$*) son equivalentes si existe una función* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *biyectiva, de* $\mathcal{C}^1$*en* $[c,d]$ *tal que* φ' *es distinta de* 0 *en todo punto y* $\gamma \circ \varphi = \beta$*. Si* $\varphi' > 0$ *en* $[c,d]$ *diremos que* φ *conserva la orientación y si* $\varphi' < 0$ *en* $[c,d]$ *diremos que* φ *invierte la orientación. Nótese que si* φ' *es mayor que* 0 *en todo punto de* $[c,d]$ *entonces* φ *es creciente y así* $\varphi(c) = a$ *y* $\varphi(d) = b$*. Si por el contrario* φ' *es menor que* 0 *en todo punto de* $[c,d]$ *entonces* φ *es decreciente y así* $\varphi(c) = b$ *y* $\varphi(d) = a$*.*

Con el objeto de definir el concepto de integral a lo largo de un camino recordamos propiedades básicas de la integral de Riemann de una función continua definida en un intervalo cerrado de la recta real. En primer lugar tenemos que definir qué se entiende por $\int_a^b h$ cuando $h : [a,b] \to \mathbb{C}$, pues bien, dado que $h = u + iv$, se define

$$\int_a^b h := \int_a^b u + i \int_a^b v$$

cuando u y v sean Riemann integrables en $[a,b]$. Nuestra función h va a ser, casi siempre, continua y por lo tanto u y v también lo serán y así son Riemann integrables. Las propiedades de esta integral que necesitaremos más adelante y que se obtienen fácilmente aplicando las propiedades que se conocen para la integral de Riemann de funciones reales con valores reales, son:

1. $\int_a^b (h+k) = \int_a^b h + \int_a^b k$, para cualesquiera h y $k : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrables.

2. $\int_a^b \lambda h = \lambda \int_a^b h$, para cualquier $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrable y $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Si $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces h es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se verifica que
$$\int_a^b h = \int_a^c h + \int_c^b h$$

4. Si $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$ y se define

$$H : t \in [a,b] \mapsto H(t) = \int_a^t h(x)dx$$

entonces H es continua en $[a,b]$ y derivable en los puntos de ese intervalo en los que la h sea continua. En cualquiera de esos puntos se verifica que $H'(t) = h(t)$. Este es uno de los teoremas fundamentales del cálculo para funciones de una variable con valores reales.

5. Si $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ es continua entonces tiene una primitiva en $[a,b]$. Basta considerar la función

$$H : t \in [a,b] \mapsto H(t) = \int_a^t h(x)dx.$$

6. Si $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$ y suponemos que h tiene una primitiva H en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b h = H(b) - H(a)$$

esta es la llamada Regla de Barrow, es otro de los teoremas fundamentales del cálculo de una variable.

7. Teorema de cambio de variable: Si φ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ entre dos intervalos $[c,d]$ y $[a,b]$ y h es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} h(s)ds = \int_c^d h(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

8. Si $h = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ es integrable en $[a,b]$, entonces $|h|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left| \int_a^b h \right| \leq \int_a^b |h|$$

Esta última propiedad no se obtiene directamente de la correspondiente propiedad para las componentes de h y vamos a demostrarla aquí: Dado que $|h| = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ se verifica que $|h|$ es integrable en $[a,b]$. Si $\int_a^b h = 0$ lo que hay que probar es obvio. Supongamos entonces que $\int_a^b h \neq 0$ y denotemos por θ al argumento principal de $\int_a^b h$. Entonces $\int_a^b h = \left|\int_a^b h\right| e^{i\theta}$ de donde se sigue que $e^{-i\theta}\int_a^b h = \left|\int_a^b h\right|$ es real. Entonces[1]

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b h\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b h = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b h\right) = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta}h\right) \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}h\right) \leq \int_a^b |e^{-i\theta}h| = \int_a^b |h| \end{aligned}$$

[1]Téngase en cuenta que si una función sólo toma valores reales su integral no tiene parte imaginaria

Definición 4.7 *Sean γ un camino y f una función continua en su traza con valores en $\mathbb{C}$. Se define la* ***integral de f a lo largo de γ*** *como*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Debe observarse que es posible que no tenga sentido hablar de $\gamma'(t)$ para algunos puntos de $[a,b]$, pero sólo hay una cantidad finita de puntos de posible no derivabilidad. La integral anterior debe entenderse, en tal caso, como

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

siendo $\{t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, b = t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\gamma_{|[t_{j-1},t_j]}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[t_{j-1},t_j]$. Nótese que por cada $j = 1,...,n$ la función $t \in [t_{j-1},t_j] \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es continua y por lo tanto integrable. A veces se escribirá $\int_\gamma f(z)dz$ en lugar de $\int_\gamma f$.

Debemos fijarnos en que lo que realmente hacemos para calcular $\int_\gamma f$ son $2n$ integrales de Riemann de funciones reales continuas en un intervalo de la recta real y luego sumar sus valores.

Ejemplo 4.8 *Sean $f(z) = \frac{1}{z}$ y $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,2\pi]$. Entonces*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i.$$

(Nótese que f es continua en la traza de γ que es precisamente la circunferencia unidad).

Ejemplo 4.9 *Sean $f(z) = 1$ y $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1);\ t \in [0,1]$. Entonces*

$$\int_\gamma 1dz = \int_0^1 (z_2 - z_1)dt = z_2 - z_1.$$

Propiedades de la integral a lo largo de un camino:

1. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino, f y g son continuas en la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_\gamma (f+g) &= \int_\gamma f + \int_\gamma g, \\ \int_\gamma \lambda f &= \lambda \int_\gamma f. \end{aligned}$$

2. Si $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es una aplicación biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ con derivada mayor que 0 en todo punto de $[c,d]$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces $\gamma \circ \varphi$ es un camino y
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f = \int_\gamma f$$
para toda función f continua en la traza de γ. Si la derivada de φ es menor que 0 en todo punto de $[c,d]$, entonces,
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f = -\int_\gamma f.$$
Téngase en cuenta que en el caso en el que $\varphi' > 0$ en $[c,d]$ entonces
$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f &= \int_c^d f\circ\gamma(\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt \\ &= \int_c^d ((f\circ\gamma)\cdot\gamma')(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} ((f\circ\gamma)\cdot\gamma')(s)ds \\ &= \int_a^b f\circ\gamma(s)\cdot\gamma'(s)ds \\ &= \int_\gamma f.\end{aligned}$$
Si $\varphi' < 0$ entonces $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$ que es lo que crea ese cambio de signo.

3. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino y definimos el camino opuesto $\gamma^{op} : [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la composición de γ y $\varphi(t) = a+b-t$, $\gamma^{op}(t) = \gamma\circ\varphi(t)$. Entonces para toda función continua f en la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$ se verifica que
$$\int_{\gamma^{op}} f = -\int_\gamma f$$
pues $\varphi'(t) = -1 < 0$ para todo $t \in [a,b]$.

4. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ son dos caminos, siendo $\gamma(b) = \beta(c)$, entonces se define el camino $\gamma \vee \beta$ como la concatenación o yuxtaposición de γ y β:
$$(\gamma\vee\beta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ \beta(t-b+c) & \text{si } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$
Para toda f continua en la traza de $\gamma\vee\beta$ con valores en $\mathbb{C}$, se verifica que
$$\int_{\gamma\vee\beta} f = \int_\gamma f + \int_\beta f.$$

5. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino, g es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contenga a la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$. Entonces $g \circ \gamma$ es un camino y para toda función continua f en la traza de $(g \circ \gamma)$ con valores en $\mathbb{C}$ se verifica que:
$$\int_{g\circ\gamma} f = \int_\gamma (f \circ g)\cdot g'.$$
En efecto, $g \circ \gamma$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[a,b]$, y
$$\begin{aligned} \int_{g\circ\gamma} f &= \int_a^b f(g\circ\gamma(t))\cdot(g\circ\gamma)'(t)dt \\ &= \int_a^b f\circ g(\gamma(t))\cdot(g'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t))dt \\ &= \int_a^b ((f\circ g)\cdot g')(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\ &= \int_\gamma (f\circ g)g'. \end{aligned}$$

6. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y f una función continua en la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$. Entonces
$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \sup\{|f(z)| : z \in \gamma([a,b])\}\cdot \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$
En efecto,
$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma f\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sup\{|f(z)| : z\in\gamma([a,b])\}|\gamma'(t)|dt \\ &= \sup\{|f(z)| : z\in\gamma([a,b])\} \int_a^b |\gamma'(t)|dt. \end{aligned}$$

7. El valor de $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$ se llama la **longitud** del camino γ y se denota por $long(\gamma)$. Se puede dar la definición de longitud de un camino como se hace en cálculo integral, usando longitudes de poligonales, y luego demostrar que ambas definiciones coinciden.

Nota 4.10 *No es cierto, en general, que* $\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f|$. *Basta considerar el camino* $\gamma(t) = it;\ t \in [0,1]$ *y la función* $f(z) = 1$ *para todo* z *en* $\mathbb{C}$. *En este caso*
$$\int_\gamma |f| = \int_0^1 1\cdot i dt = i,$$
que no puede compararse con $\left|\int_\gamma f\right|$ *(cuyo valor es* 1*). También se puede observar con este ejemplo que, en general,* $\operatorname{Re}\int_\gamma f \neq \int_\gamma \operatorname{Re} f$.

Teorema 4.11 *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$ que converge uniformemente a una función f en $\gamma([a,b])$, entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n$ y se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \nu$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{long(\gamma) + 1}, \quad \forall z \in \gamma([a,b]).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| &= \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \\ &\leq \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma([a,b])\} long(\gamma) < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Corolario 4.12 *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en la traza de γ con valores en $\mathbb{C}$ tal que $\sum f_n$ converge uniformemente a una función f en $\gamma([a,b])$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n$ converge y se verifica*

$$\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n = \int_\gamma \sum_{n=1}^\infty f_n = \int_\gamma f.$$

En efecto, sabemos que la sucesión de funciones $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ converge uniformemente a una función f en el conjunto $\gamma([a,b])$, luego por el teorema anterior $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma s_n = \int_\gamma f$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma s_n = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma (f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_\gamma f_k = \sum_{k=1}^\infty \int_\gamma f_k.$$

Teorema 4.13 (Regla de Barrow) *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino, f una función continua en $\gamma([a,b])$ con valores en $\mathbb{C}$ y supongamos que la función f tiene una primitiva F entonces se verifica que*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Si γ es un camino cerrado esa integral es 0.

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_\gamma F' &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt \\ &= F\circ\gamma(b) - F\circ\gamma(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Si γ es cerrado, $\gamma(b)=\gamma(a)$ y por lo tanto, $\int_\gamma F' = 0$. □

Corolario 4.14 *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Para todo $k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1$, y todo camino cerrado γ en $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, se verifica que:*

$$\int_\gamma (z-z_0)^k dz = 0.$$

Basta observar que dado $k \in \mathbb{Z},\ k \neq -1$, la función

$$F(z) = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$$

está en las condiciones del teorema y que $F'(z) = (z-z_0)^k$. Sin embargo, si $k=-1$ eso puede no ser cierto, esto ocurre si, por ejemplo, γ es una circunferencia $\mathcal{C}(z_0, r)$ de centro en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$, en este caso se verifica que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i.$$

En el siguiente teorema se obtienen las propiedades de las funciones definidas mediante integración en un camino. En $\mathbb{C}^2$ consideramos la distancia

$$d((z_1,z_2),(z_1',z_2')|) = \sqrt{|z_1-z_1'|^2 + |z_2-z_2'|^2},$$

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,\ z_1' = x_1' + iy_1',\ z_2' = x_2' + iy_2'$, que es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^4$ de los puntos (x_1, y_1, x_2, y_2) y (x_1', y_1', x_2', y_2').

Teorema 4.15 (Regla de Leibniz de derivación bajo la integral) *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi : U \times \gamma^* \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una función continua, entonces la función*

$$f(z) = \int_\gamma \varphi(z,w)dw; \quad z \in U$$

es continua en U. Además, si para todo punto $(z,w) \in U \times \gamma^*$ existe $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)$ y la función

$$(z,w) \in U \times \gamma^* \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)$$

es continua, entonces f es holomorfa en U y

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,w)dw \qquad \forall z \in U.$$

Demostración. Sean $z_0 \in U$, $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0,r) \subset U$ y sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos de U tal que $z_n \to z_0$. Veamos como $f(z_n) \to f(z_0)$. En efecto,

$$\begin{aligned}|f(z_n) - f(z_0)| &= \left|\int_\gamma (\varphi(z_n,w) - \varphi(z_0,w))dw\right| \leq \\ & \sup_{w\in\gamma^*} |\varphi(z_n,w) - \varphi(z_0,w)| long(\gamma).\end{aligned}$$

Como φ es continua en $U\times\gamma^*$, es uniformemente continua en $\overline{D}(z_0,r)\times\gamma^*$ por lo que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0,r)$ tal que para todo $(z,w), (z',w') \in \overline{D}(z_0,r)\times\gamma^*$, $d((z,w),(z',w')) < \delta$ se verifica que

$$|\varphi(z,w) - \varphi(z',w')| < \frac{\varepsilon}{long(\gamma)+1}$$

y, en consecuencia, existe $\nu \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Longrightarrow\ |z_n - z_0| = d((z_n,w),(z_0,w)) < \delta.$$

Así

$$|f(z_n) - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{long(\gamma)+1} long(\gamma) < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

Veamos la segunda afirmación del teorema.

Dado $z_0 \in U$ sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0,r) \subset U$. Para cualquier $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, (de módulo menor o igual que r para que $[z_0, z_0+h] \subset \overline{D}(z_0,r)$) se verifica que

$$\begin{aligned}&\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,w)dw \\ &\overset{(\text{def. de } f)}{=} \int_\gamma \left[\frac{\varphi(z_0+h,w) - \varphi(z_0,w)}{h} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,w)\right] dw \\ &\overset{(\text{R. de Barrow})}{=} \int_\gamma \frac{1}{h}\left[\int_{[z_0,z_0+h]} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)dz - \int_{[z_0,z_0+h]} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,w)dz\right] dw \\ = &\int_\gamma \frac{1}{h}\left[\int_{[z_0,z_0+h]} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,w)\right) dz\right] dw.\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ es continua en $U \times \gamma([a,b])$, es uniformemente continua en $\overline{D}(z_0,r) \times \gamma([a,b])$ y por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta \in (0,r)$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ y $w \in \gamma([a,b])$ se verifica que

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z_0,w)\right| < \frac{\varepsilon}{long(\gamma)+1}$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,w)dw \right| \\
\leq\ & \frac{1}{|h|} \sup_{w\in\gamma^*} \left\{ \left| \int_{[z_0,z_0+h]} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,w) \right) dz \right| \right\} \\
\leq\ & \frac{1}{|h|} \sup_{(z,w)\in D(z_0,\delta)\times\gamma([a,b])} \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,w) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,w) \right| \right\} \cdot \\
& long([z_0,z_0+h]) \cdot long(\gamma) \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{long(\gamma)+1} |h| \cdot \frac{1}{|h|} long(\gamma) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que da el resultado. □

Usando este resultado podemos mejorar el corolario anterior demostrando que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i$$

para todo $z \in D(z_0,r)$. En efecto, la función

$$\varphi : (z,w) \in (\mathbb{C} \backslash \mathcal{C}(z_0,r)) \times \mathcal{C}(z_0,r) \mapsto \varphi(z,w) = \frac{1}{w-z}$$

es continua y tiene derivada parcial respecto a z en todo punto y ésta es

$$(z,w) \mapsto \frac{1}{(w-z)^2}.$$

Esto nos da que la función

$$f(z) = \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{w-z} dw$$

es derivable en cada punto $z \in D(z_0,r)$ y

$$f'(z) = \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{(w-z)^2} dw$$

pero, dado que fijado $z \in D(z_0,r)$ la función $w \in \mathcal{C}(z_0,r) \mapsto \frac{1}{(w-z)^2}$ tiene una primitiva, luego, como se ha visto que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{(w-z)^2} dw = 0$$

esto implica que f es constante en $D(z_0,r)$, y como $f(z_0) = 2\pi i$ se tiene lo que quería.

Teorema 4.16 (Teorema integral de Cauchy-Goursat para un triángulo) *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, p un punto de U y f una función continua en U y holomorfa en $U \setminus \{p\}$[**]. Entonces para todo triángulo Δ contenido en U se verifica que*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0.$$

donde $\partial\Delta$, que es la frontera de Δ, es el camino formado por la yuxtaposición de los lados de Δ. No importa cual sea la orientación de este camino.

Nota 4.17 *Para obtener este resultado Cauchy exigía que la función f tuviese derivada continua, pues él utilizaba el teorema de Green para su demostración (véase el Apéndice I), posteriormente Goursat vio que lo mismo podía demostrarse sin suponer la continuidad de f', por medio de la elegante prueba que damos a continuación.*

Demostración. Denotemos por a, b y c los vértices de Δ. Su frontera es el camino determinado por los segmentos $[a, b]$, $[b, c]$ y $[c, a]$. Supongamos, por un momento, que $p \notin \Delta$ (ni a los lados ni a su interior).

Las paralelas medias a los lados de Δ determinan triángulos Δ^1, Δ^2, Δ^3, Δ^4 de vértices a, c', b'; b, a', c'; c, b', a'; a', b', c' siendo a', b', c' los puntos medios de los lados $[b, c]$, $[c, a]$ y $[a, b]$ respectivamente, y cuyas fronteras están determinadas por los segmentos $[a, c']$, $[c', b']$, $[b', a]$; $[b, a']$, $[a', c']$, $[c', b]$; $[c, b']$, $[b', a']$, $[a', c]$ y $[a', b']$, $[b', c']$ y $[c', a']$ respectivamente.

Es claro que se verifica que:

$$\int_{\partial\Delta} f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f$$

y entonces para alguno de los triángulos Δ^j, que denotaremos por Δ_1 (puede haber varios, en ese caso elegimos cualquiera de ellos), debe verificarse que

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\Delta} f \right|$$

pues de lo contrario

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \right| = \left| \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^j} f \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta^j} f \right| < \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta} f \right| = \left| \int_{\partial\Delta} f \right|$$

lo que es absurdo.

Si repetimos ahora el argumento anterior para Δ_1 obtenemos un triángulo Δ_2 tal que

$$\left| \int_{\partial\Delta_2} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial\Delta_1} f \right| \geq \frac{1}{4^2} \left| \int_{\partial\Delta} f \right|.$$

Reiterando este proceso obtenemos una sucesión de triángulos $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que:

[**] Se verá más adelante que las funciones continuas en U y holomorfas en $U \setminus \{p\}$ son también derivables en p, esto es, holomorfas en U

1. $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$

2. $\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right|$

3. $long(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}long(\partial\Delta)$.

Los triángulos Δ_n son compactos y entonces $\cap\Delta_n \neq \emptyset$. En efecto, si $\cap\Delta_n = \phi$ entonces $\cup\Delta_n^c = (\cap\Delta_n)^c = \phi^c = \mathbb{C}$, con lo que Δ_1 está contenido en la unión de abiertos $\cup\Delta_n^c$. Al ser Δ_1 compacto existen $n_1 < n_2 < \cdots < n_k \in \mathbb{N}$ tales que $\Delta_1 \subset \cup_{j=1}^k \Delta_{n_j}^c = \Delta_{n_k}^c$, lo que es absurdo, pues $\Delta_1 \supset \Delta_{n_k}$. Sea z_0 un punto de esa intersección (de hecho no hay más que un punto en esa intersección). Dado que $p \notin \Delta$, $z_0 \neq p$, con lo que f es derivable en z_0 y por lo tanto

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ /\ |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$$

para todo $z \in U$, $|z - z_0| < \delta$. Como la sucesión $\{long(\partial\Delta_n)\}$ converge a cero, dado $\delta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $long(\partial\Delta_n) < \delta$ y por tanto $|z - z_0| < \delta$ para todo $z \in \Delta_n$, de donde se sigue, usando en la primera igualdad el corolario 4.14, que para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz\right| \\
&\leq \sup_{z\in\partial\Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|\, long(\partial\Delta_n) \\
&\leq \varepsilon \sup_{z\in\Delta_n} |z - z_0| long(\partial\Delta_n) \\
&\leq \varepsilon(long(\partial\Delta_n))^2 = \varepsilon\frac{1}{4^n}(long(\partial\Delta))^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| \leq \varepsilon\frac{1}{4^n}(long(\partial\Delta))^2$$

lo que nos da que

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq \varepsilon(long(\partial\Delta))^2.$$

La arbitrariedad de ε nos da que necesariamente $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Supongamos ahora que $p \in \Delta$. Distinguimos tres casos:

i) p es un vértice de Δ. Supongamos que $p = a$. Como f es continua en Δ, existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para todo } z \in \Delta.$$

Consideremos puntos $x,\ y \in D(a,r)$ con $x \neq a$ en el lado $[a,b]$ e $y \neq a$ en el lado $[c,a]$. Denotemos por $\Delta_{x,y}^1$ al triángulo de vértices a,x,y, por $\Delta_{x,y}^2$ al de vértices x,b,y, y por $\Delta_{x,y}^3$ al de vértices b,c,y. Dado que $p\ (= a)$ no está ni en $\Delta_{x,y}^2$ ni en $\Delta_{x,y}^3$, sabemos, por lo ya demostrado, que

$$\int_{\partial\Delta_{x,y}^2} f = \int_{\partial\Delta_{x,y}^3} f = 0$$

y entonces
$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta^1_{x,y}} f.$$
Ahora bien,
$$\left|\int_{\partial\Delta^1_{x,y}} f\right| \leq M{\cdot}long(\partial\Delta^1_{x,y}).$$
Dada la arbitrariedad de x e y en las condiciones indicadas, resulta que $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

ii) Si p está en un lado de Δ, considerando el segmento que determinan p y el vértice de Δ que no esté en el lado en el que está p, obtenemos dos triángulos (cuyos lados se consideran recorridos en el sentido adecuado) que se encuentran en las condiciones de (i) y entonces la integral de f en la frontera de esos triángulos es 0 con lo que $\int_\Delta f = 0$.

iii) Si p está en el interior de Δ, considerando los tres triángulos que determinan p y los vértices de Δ (cuyos lados se consideran recorridos en el sentido adecuado) tenemos, por lo anterior que en cada uno de ellos la integral es 0 y por lo tanto $\int_\Delta f = 0$. □

Probamos ahora un resultado en el que se basará la prueba del teorema central de la teoría de funciones de variable compleja, el llamado Teorema Integral de Cauchy local.

Recordamos que un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice **convexo** si para todo par de puntos $z,\ w \in S$ el segmento que los une, $[z, w]$, está contenido en S.

Teorema 4.18 (existencia de primitivas en abiertos convexos) *Sean U un abierto convexo de $\mathbb{C}$, $p \in U$ y $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \backslash \{p\})$. Entonces existe $F \in \mathcal{H}(U)$ tal que $F' = f$ en U.*

Demostración. Fijemos un punto z^* en U y consideremos la función
$$F : z \in U \mapsto F(z) = \int_{[z^*,z]} f(w)dw.$$
Veamos cómo esta función F satisface las condiciones del teorema. Para ello sea z_0 un punto arbitrario de U, dado un punto $z \in U,\ z \neq z_0$, el triángulo*** Δ de vértices z^*, z y z_0 está contenido en U (pues éste es convexo). El teorema integral de Cauchy para el triángulo nos da que $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Esto es,
$$\int_{[z^*,z]} f + \int_{[z,z_0]} f + \int_{[z_0,z^*]} f = 0.$$
En consecuencia
$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\int_{[z_0,z]} f}{z - z_0}$$

***Si los puntos $z^*,\ z$ y z_0 están alineados lo que sigue es inmediato.

y por lo tanto

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| = \left|\frac{\int_{[z_0,z]} f - \int_{[z_0,z]} f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{\left|\int_{[z_0,z]}(f(w)-f(z_0))dw\right|}{|z-z_0|}.$$

Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ sea $\delta > 0$ tal que

$$|f(w)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } w \in D(z_0,\delta),$$

entonces, para $z \in D(z_0,\delta), z \neq z_0$,

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| \leq \frac{\sup\{|f(w)-f(z_0)| : w \in [z_0,z]\}\ |z-z_0|}{|z-z_0|} < \varepsilon$$

lo que nos da que F es derivable en z_0 y que $F'(z_0) = f(z_0)$. □

Nota 4.19 *Observamos que en la demostración del teorema anterior sólo se ha utilizado el hecho de que el abierto U es convexo, $f \in \mathcal{C}(U)$ y que la integral de f a lo largo de la frontera de cualquier triángulo en U es 0 (en el teorema de Morera, que daremos más adelante, lo utilizaremos así).*

Nota 4.20 *Observamos también que la demostración del teorema anterior es válida si se trata de un abierto estrellado (existe $z^* \in U$ tal que $[z,z^*] \subset U$ para todo $z \in U$) y lo mismo sucede con el teorema que sigue:*

Teorema 4.21 (versión local del teorema integral de Cauchy) *Sean U un abierto convexo, p un punto de U y f una función continua en U y holomorfa en $U\backslash\{p\}$. Entonces $\int_\gamma f = 0$ para todo camino cerrado γ en U.*

Demostración. Como estamos en las hipótesis del teorema anterior existe $F \in \mathcal{H}(U)$ tal que $F' = f$ en U, se sigue del Teorema 4.13 (regla de Barrow) que

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = 0$$

cualquiera que sea el camino cerrado γ en U. □

Nota 4.22 *El término **local** que aparece en el teorema anterior se justifica de la siguiente manera. Dado cualquier abierto U de $\mathbb{C}$ y cualquier punto z_0 de él, el teorema se verifica para todos los caminos cerrados de un disco centrado en z_0, de hecho para todos los caminos cerrados del mayor disco centrado en z_0 contenido en U. Nótese que los discos son convexos.*

Nota 4.23 *El anterior teorema es central en la teoría de funciones de variable compleja, prácticamente todos los resultados que se obtendrán a partir de aquí lo utilizan.*

Nota 4.24 *En lo que sigue denotaremos por* δ_{z_0} *a la distancia del punto* z_0*, perteneciente a un abierto* U *de* $\mathbb{C}$*, al complementario de* U*, esto es*

$$\delta_{z_0} = dist(z_0, \mathbb{C}\backslash U) = ínf\{|z_0 - z| : \ z \in \mathbb{C}\backslash U\},$$

en el caso de $U = \mathbb{C}$*,* $\delta_{z_0} = \infty$*. Así, para cada* $z \in \mathbb{C}\backslash U$ *se verifica, por definición de ínfimo, que* $\delta_{z_0} \leq |z_0 - z|$ *y por tanto* $D(z_0, \delta_{z_0}) \subset U$*.*

Teorema 4.25 (fórmula integral de Cauchy para circunferencias) *Sean* U *un conjunto abierto de* $\mathbb{C}$*,* $f \in \mathcal{H}(U)$ *y* $\overline{D}(z_0, r)$ *un disco cerrado contenido en* U*. Entonces,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \textit{para todo } z \in D(z_0, r).$$

$\mathcal{C}(z_0, r)$ *denota la circunferencia de centro* z_0 *y radio* r *parametrizada por la aplicación continua* $t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{it}$*.*

Demostración. Dado $z \in D(z_0, r)$ consideremos la función

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

Esta función es continua en U y derivable en $U\backslash\{z\}$. Del anterior teorema integral de Cauchy aplicado al disco de centro z_0 y radio r (que está contenido en U), deducimos que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} g(w)dw = 0,$$

con lo que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0,$$

de donde se sigue que

$$f(z) \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{w - z} dw = \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ahora bien, se ha demostrado después de la Regla de Leibniz que

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i$$

para todo $z \in D(z_0, r)$, lo que nos da el resultado. □

Con ayuda de este teorema podremos obtener los demás resultados del curso. Empezamos viendo que las funciones holomorfas son analíticas, esto es, se pueden expresar, en un entorno de cada punto como una serie de potencias centrada en ese punto.

Teorema 4.26 (analiticidad de las funciones holomorfas) *Toda función holomorfa en un abierto U es analítica en él. Además para cada $z_0 \in U$ la serie de Taylor de f en ese punto converge a f (puntualmente) en el mayor disco abierto de centro z_0 contenido en U.*

Demostración. Dado $z_0 \in U$ denotemos, como antes, por δ_{z_0} la distancia de z_0 a ∂U. Si $U = \mathbb{C}$, tomamos $\delta_{z_0} = \infty$. Por cada $r \in (0, \delta_{z_0})$ denotemos por $\mathcal{C}(z_0, r)$ la circunferencia definida por $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$.

En virtud de la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para todo $z \in D(z_0, r)$. Ahora bien, para cualquier $z \in D(z_0, r)$ y $w \in \mathcal{C}(z_0, r)$ se tiene que:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n.$$

Como además $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$ para todo $w \in \mathcal{C}(z_0, r)$, el criterio mayorante de Weierstrass nos da que

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

de modo uniforme en $\mathcal{C}(z_0, r)$, pues f está acotada en ese compacto, con lo que se puede intercambiar el orden entre la integral y la suma,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Hemos obtenido así un desarrollo de Taylor para f en torno a z_0 que converge a f en los puntos $z \in D(z_0, r)$. La arbitrariedad de r en $(0, \delta_{z_0})$ nos da el resultado. □

Corolario 4.27 (fórmulas integrales de Cauchy para las derivadas) *En las hipótesis y notaciones del teorema se tiene que:*

$$\frac{1}{n!} f^{n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

Obsérvese que el valor de $\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$ no depende del r con tal de que sea menor que δ_{z_0}.

Obtenemos ahora un teorema que es, en cierto modo, recíproco del teorema de Cauchy para el triángulo que obtuvimos en el tema anterior:

Teorema 4.28 (de Morera) *Si U es un abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(U)$ y se verifica que $\int_{\partial\Delta} f = 0$ para todo triángulo Δ en U, entonces $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Demostración. Consideremos un abierto convexo $V \subset U$. Teniendo en cuenta la nota que se hizo al final de la demostración del teorema de existencia de primitivas en abiertos convexos resulta que existe $F \in \mathcal{H}(V)$ verificando que $F' = f$ en V. Ahora bien, F, por ser holomorfa en V es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en él, por lo tanto f también lo es, luego es holomorfa en V. Dado que U puede ponerse como unión de abiertos convexos tenemos el resultado. □

Corolario 4.29 *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $p \in U$ y $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \backslash \{p\})$. Entonces $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Téngase en cuenta que con esas hipótesis sobre f el teorema de Cauchy para el triángulo demuestra que $\int_{\partial\Delta} f = 0$ para todo triángulo Δ en U.

Corolario 4.30 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto U que converge uniformemente en los compactos de U a una función $f : U \to \mathbb{C}$, entonces $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Demostración. Veamos primero cómo f es continua. Sean $z_0 \in U$ y $\{z_k\}$ una sucesión convergente a z_0. Entonces, para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$,

$$|f(z_k) - f(z_0)| \leq |f(z_k) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|.$$

Como $\{z_k\} \cup \{z_0\}$ es un compacto de U y $f_n \to f$ uniformemente en él, el primer y el tercer sumando son menores que un $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ prefijado, para cualquier k, siempre que n sea suficientemente grande. Fijemos un tal n y denotémoslo por n_0, la continuidad de f_{n_0} nos garantiza la existencia de un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{n_0}(z_k) - f_{n_0}(z_0)|$ es también menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ para todo $k \geq \nu$, con lo que $|f(z_k) - f(z_0)| < \varepsilon$ para todo $k \geq \nu$.

Veamos ahora cómo f es holomorfa en U. Para ello consideremos un triángulo Δ en U, como Δ es compacto y $f_n \to f$ uniformemente en él (en particular lo hace en su frontera) se tiene que

$$\int_{\partial\Delta} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n = 0,$$

el resultado se sigue entonces del teorema de Morera teniendo en cuenta que cada f_n es holomorfa en U y por lo tanto $\int_{\partial\Delta} f_n = 0$. □

Vamos a volver ahora a la fórmula integral de Cauchy, más concretamente a esa fórmula para las derivadas sucesivas. Obtendremos a partir de ellas dos interesantes, y sorprendentes, resultados sobre las funciones holomorfas.

Teorema 4.31 (desigualdades de Cauchy) *Sea $f \in \mathcal{H}(U)$ y sean $z_0 \in U$ y $r > 0$ tales que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Entonces*

$$\frac{1}{n!}\left|f^{n)}(z_0)\right| \leq \frac{1}{r^n}\sup\{|f(w)| : |w - z_0| = r\} \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2...$$

Obsérvese que obtenemos una acotación de los módulos de las derivadas sucesivas de f en z_0 en términos de los valores de f en la circunferencia de centro z_0 y radio r.

Demostración. Sabemos que

$$\frac{1}{n!}f^{n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n!}f^{n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\right| : w \in \mathcal{C}(z_0, r)\right\} long(\mathcal{C}(z_0, r)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\frac{|f(w)|}{r^{n+1}} : w \in \mathcal{C}(z_0, r)\right\} 2\pi r \\
&= \frac{1}{r^n}\sup\left\{|f(w)| : |w - z_0| = r\right\}.
\end{aligned}$$

□

Nota 4.32 *Estas desigualdades son las mejores posibles válidas para todas las funciones holomorfas en U, téngase en cuenta que si fijado $n \in \mathbb{N}$ tomamos $f(z) = z^n$ y $r = 1$ entonces se da la igualdad:*

$$\frac{1}{n!}\left|f^{n)}(0)\right| = 1 = \sup\{|f(z)| : |z| = 1\}.$$

Definición 4.33 *Se llamará función* **entera** *a toda función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.*

Teorema 4.34 (de Liouville) *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Se sigue de las desigualdades de Cauchy que

$$\frac{1}{n!}\left|f^{n)}(0)\right| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2... \text{ y } r > 0.$$

Entonces, para todo $n = 1, 2...$ resulta que $f^{n)}(0) = 0$, luego, dado que para todo $z \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{n)}(0)z^n,$$

resulta que $f(z) = f(0)$ en todo punto de $\mathbb{C}$, por lo tanto f es la constante $f(0)$ en todo $\mathbb{C}$. $\square$

Obsérvese que a la vista de este teorema, las funciones *sen* y *cos*, que son holomorfas en todo $\mathbb{C}$, no son acotadas (mientras que en el caso real sí), pues de serlo serían constantes y no lo son.

Una consecuencia relevante del teorema de Liouville es el llamado Teorema Fundamental del Álgebra o Teorema de Gauss.

Teorema 4.35 (de Gauss) *Todo polinomio complejo de grado n, siendo n mayor o igual que 1, tiene n raíces complejas.*

Demostración. Sea

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Dado que

$$\mathit{lím}_{z\to\infty} \frac{p(z)}{z^n} = a_n$$

existe $r_0 > 0$ tal que

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| > \frac{1}{2}|a_n| \quad \text{si } |z| > r_0.$$

Si suponemos que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $\frac{1}{p}$ es una función entera y

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| < \frac{2}{|a_n||z^n|} < \frac{2}{|a_n|r_0^n} \quad \text{si } |z| > r_0.$$

Por otra parte, al ser $\frac{1}{p}$ continua, es acotada en el compacto $\overline{D}(0, r_0)$ y por lo tanto existe $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq M \text{ si } |z| \leq r_0.$$

Resumiendo, $\frac{1}{p}$ es acotada, y al ser entera debe ser constante (teorema de Liouville), pero claro, entonces p es también constante, lo que es absurdo pues p es un polinomio de grado mayor o igual que 1.

Resulta pues que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_1) = 0$. Si $n > 1$ y dividimos $p(z)$ por $(z - z_1)$ obtenemos un polinomio p_1 de grado $n - 1$ tal que

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z).$$

Aplicando el argumento anterior (si $n - 1 \geq 1$), p_1 deber tener una raíz z_2, que también lo es de p, repitiendo este proceso obtenemos n raíces para p. $\square$

Para sucesiones $\{f_n\}$ de funciones derivables de variable real no se puede garantizar que si $f_n \to f$, entonces $f'_n \to f'$, aunque la convergencia sea uniforme en $\mathbb{R}$; por ejemplo, si se considera la sucesión $\{f_n\}$ definida en $\mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n}$. En el caso complejo se puede obtener la convergencia de las derivadas a partir de la convergencia de las funciones. Esto es lo que demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.36 (de Weierstrass) *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones holomorfas en* U *que converge uniformemente a una función* f *en los compactos de* U*, entonces para todo* $k = 1, 2, \ldots$ *se tiene que* $f_n^{k)} \to f^{k)}$ *uniformemente en los compactos de* U*.*

Demostración. Sea K un compacto de U y sea $r > 0$ tal que

$$L := K + \overline{D}(0, r) = \{v = z + w : z \in K, w \in \overline{D}(0, r)\} \subset U.$$

Entonces el conjunto L es un también compacto y $\overline{D}(z, r) \subset U$ para todo $z \in K$. Fijemos $k = 1, 2 \ldots$ y apliquemos las desigualdades de Cauchy a $f_n^{k)} - f^{k)}$ en $\overline{D}(z, r)$, obtenemos que

$$\left|\left(f_n^{k)} - f^{k)}\right)(z)\right| \leq \frac{k!}{r^k} \sup\{|(f_n - f)(v)| : v \in L\} \quad \text{para todo } z \in K.$$

Como $f_n \to f$ uniformemente en L tenemos que $f_n^{k)} \to f^{k)}$ uniformemente en K. $\square$

Tema 5

La función índice. El teorema global de Cauchy. Conexión simple

Definición 5.1 *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un camino cerrado y sea* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. *Se llama índice de* z_0 *respecto de* γ *a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w - z_0}dw.$$

Se representará por $\acute{I}nd_\gamma(z_0)$.

Intuitivamente, el índice de un punto respecto a un camino representa el "número de vueltas" que da el camino alrededor del punto. Esto puede verse en el Apéndice I de este Manual.

Ejemplo 5.2 *Sea* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *definida por* $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, *siendo* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y* $r > 0$ *fijos, resulta que*

$$\acute{I}nd_\gamma(z_0) = 1.$$

Teorema 5.3 *Sea* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un camino cerrado. La aplicación*

$$z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^* \mapsto \acute{I}nd_\gamma(z)$$

tiene las siguientes propiedades

1. Es continua.

2. Sólo toma valores enteros y por lo tanto es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

3. Es idénticamente nula en la componente conexa no acotada.

Demostración. 1. Basta observar que

$$\acute{I}nd_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w - z}dw$$

y que la aplicación

$$(z,w) \in (\mathbb{C}\backslash\gamma^*) \times \gamma^* \mapsto \frac{1}{w-z}$$

es continua en $(\mathbb{C}\backslash\gamma^*) \times \gamma^*)$ y aplicar la Regla de Leibniz.

2. Fijemos z_0 y definamos una función $h(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt,\ x \in [a,b]$. Se verifica que h es continua en $[a,b]$ y derivable en $[a,b]$ salvo quizá en un número finito de puntos. Además la función $(\gamma(t)-z_0)e^{-h(t)}$ es también continua en $[a,b]$ y derivable en $[a,b]$ salvo quizá en un número finito de puntos y su derivada es cero. Luego es constante en $[a,b]$ y entonces la función $(\gamma(t)-z_0)e^{-h(t)}$ toma el mismo valor en a y en b, lo que nos da que $e^{-h(a)} = e^{-h(b)}$ pues $\gamma(a)-z_0 = \gamma(b)-z_0 \neq 0$. Como $h(a) = \int_a^a \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt = 0$ se tiene que existe k entero tal que $h(b) = 2k\pi i$ y por lo tanto el resultado. $\acute{I}nd_\gamma(z)$ es siempre un número entero, y como esta aplicación es continua, debe ser constante en cada componente conexa de su dominio.

3. Dado que γ^* es un conjunto compacto existe $R>0$ tal que $\gamma^* \subset D(0,R)$. Sea z_0 un complejo de módulo mayor que R. La función

$$w \in D(0,R_\gamma) \mapsto \frac{1}{w-z_0}$$

es holomorfa en el abierto convexo $D(0,R)$, luego por el teorema de Cauchy para abiertos convexos

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z_0}dw = 0.$$

Dado que $\acute{I}nd$ es constante en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$, vale 0 en todos los puntos de ella. □

Podemos ya dar una versión un poco más general de la fórmula integral de Cauchy local, válida para caminos cerrados, no necesariamente circunferencias:

Teorema 5.4 (fórmula integral de Cauchy para caminos cerrados) *Para todo subconjunto abierto y convexo U de $\mathbb{C}$ y toda $f \in \mathcal{H}(U)$ se verifica que*

$$f(z)\cdot\acute{I}nd_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

para todo camino cerrado γ en U cualquiera que sea $z \in U\backslash\gamma^*$.

La demostración es la misma que la del correspondiente teorema para circunferencias (Teorema 4.25), teniendo en cuenta que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw$, que en el caso de que γ sea una circunferencia y z esté “dentro” de ella es 1 (téngase en cuenta que el índice del centro de la circunferencia es 1 y el índice es constante en el disco), ahora es el $\acute{I}nd_\gamma(z)$.

En el tema anterior hemos obtenido un teorema integral de Cauchy válido para abiertos convexos y, como ya indicamos, para un entorno (convexo) de cualquier punto de un abierto arbitrario. Vamos a dar ahora una versión mucho más general de ese teorema.

Definición 5.5 *Se llama ciclo a cualquier conjunto finito de caminos cerrados. Se dice que un ciclo* $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ *está contenido en un abierto* U *de* $\mathbb{C}$ *si* γ_j^* *está contenido en* U *para todo* $j = 1, ..., n$*. Para un ciclo* $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ *representaremos por* Γ^* *a la* $\cup_{j=1}^n \gamma_j^*$.

Definición 5.6 *Dados un ciclo* $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ *y una función continua en* Γ^* *se define* $\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f$*. Dado un punto* z_0 *de* $\mathbb{C}$ *tal que* $z_0 \notin \Gamma^*$ *se define el índice de* z_0 *respecto de* Γ *como*

$$Índ_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - z_0}dw = \sum_{j=1}^n Índ_{\gamma_j}(z_0).$$

Definición 5.7 *Se dice que un ciclo* Γ *en* U *es homólogo a* 0 *en* U *si se verifica que* $Índ_\Gamma(z) = 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}\backslash U$*. Si* Γ *es homólogo a 0 en* U *se escribe* $\Gamma \simeq 0(U)$.

Si U es un abierto convexo entonces se verifica que todo ciclo en U es homólogo a cero en U, pues para cada camino cerrado γ en U y para cada $z \in \mathbb{C}\backslash U$ el $Índ_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw = 0$. En efecto, por ser $f(w) = \frac{1}{w-z}$ una función holomorfa en el abierto convexo U, se puede aplicar el teorema de Cauchy para abiertos convexos que afirma que $\int_\gamma f = 0$. También si $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ son dos circunferencias con centro 0 con orientaciones opuestas se verifica que $\Gamma \simeq 0(U)$.

Lema 5.8 *Sea* $f : U \to \mathbb{C}$ *una función holomorfa en el abierto* U *y definimos:*

$$g : (z, w) \in U \times U \mapsto g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & si\ w \neq z \\ f'(z) & si\ w = z. \end{cases}$$

Entonces g *es continua en* $U \times U$.

Demostración. Esta función es continua, desde luego, en los puntos de la forma (z, w) con $z \neq w$. Consideremos ahora un punto de la forma (z_0, z_0). Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset U$ y $|f'(v) - f'(z_0)| < \varepsilon$ para todo $v \in D(z_0, \delta)$ (nótese que f' es continua en U), entonces para z y $w \in D(z_0, \delta)$, $w \neq z$, se tiene que $[z, w] \subset D(z_0, \delta)$ y

$$\begin{aligned} |g(w, z) - g(z_0, z_0)| &= \left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z_0)\right| \\ &= \left|\frac{\int_{[z,w]} f'(v)dv}{w - z} - f'(z_0)\right| \\ &= \left|\frac{\int_{[z,w]}(f'(v) - f'(z_0))dv}{w - z}\right| \\ &\leq \sup_{v\in[z,w]} |f'(v) - f'(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

En los puntos z y $w \in D(z_0, \delta)$, con $w = z$, se tiene también que

$$|g(z,w) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

Lema 5.9 *Sean $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto U, g la función del lema anterior y Γ un ciclo en U. Entonces la función*

$$h(z) = \int_\Gamma g(z,w)dw$$

es holomorfa en U.

Demostración. Observamos antes de nada que al ser g continua en $U \times U$, lo es en $U \times \Gamma^*$ y por tanto h es continua en U. Para ver que h es holomorfa en U utilizaremos el teorema de Morera, que nos dice que si una función h es continua en U y se verifica que $\int_{\partial\Delta} h = 0$ para todo triángulo $\Delta \subset U$, entonces h es holomorfa en U. Sea pues $\Delta \subset U$,

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(z,w)dw \right) dz = \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)dz \right) dw$$

(se usa el teorema de Fubini pasando a integrales en intervalos de la recta real). Fijado $w_0 \in \Gamma^*$ la aplicación $z \in U \mapsto g(z, w_0)$ es continua en U y holomorfa en $U \backslash \{w_0\}$, luego $\int_{\partial\Delta} g(z,w_0)dz = 0$ (teorema integral de Cauchy para el triángulo), con lo que $\int_{\partial\Delta} h = 0$. $\square$

Lema 5.10 *Sean $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en el abierto U y Γ un ciclo en U. Entonces la función*

$$h^*(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$.

Demostración. Consideremos la función

$$\varphi(z,w) = \frac{f(w)}{w-z} \qquad (z,w) \in (\mathbb{C}\backslash\Gamma^*) \times \Gamma^*.$$

Esta función es continua, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w) = \frac{f(w)}{(w-z)^2}$ y la función

$$(z,w) \in (\mathbb{C}\backslash\Gamma^*) \times \Gamma^* \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)$$

es continua, luego por el teorema de Leibniz de derivación bajo el signo integral (aplicado a cada uno de los caminos de Γ) se verifica que h^* es holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. $\square$

Teorema 5.11 (versión global de la fórmula integral de Cauchy) *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, Γ un ciclo tal que $\Gamma \simeq 0(U)$ y f una función holomorfa en U. Entonces, para todo $z \in U \backslash \Gamma^*$ se verifica que:*

$$f(z) \acute{I}nd_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Demostración. Si $U = \mathbb{C}$ entonces U convexo y el resultado se obtiene aplicando el teorema más general de la fórmula integral de Cauchy para abiertos convexos a cada camino cerrado y se suma. Supondremos entonces que $U \neq \mathbb{C}$.

Sea $V = \{z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \acute{I}nd_\Gamma(z) = 0\}$. Se verifica que V no es vacío y es un conjunto abierto; pues si $z_0 \in V$, al ser $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ abierto, existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. Como $D(z_0, r)$ es conexo y la aplicación índice es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$ tenemos que $\acute{I}nd_\Gamma(z) = \acute{I}nd_\Gamma(z_0) = 0$ para todo $z \in D(z_0, r)$, esto es, $D(z_0, r)$ está contenido en V. Por otra parte, como $\Gamma \simeq 0(U)$, resulta que $\mathbb{C}\backslash U \subset V$, lo que nos da que

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}\backslash U) \cup U \subset V \cup U \text{ (de hecho son iguales).}$$

Como además $\mathbb{C} \cap V \neq \emptyset$ y $\mathbb{C} \cap U \neq \emptyset$ la conexión de $\mathbb{C}$ nos da que $U \cap V \neq \emptyset$. Definimos ahora otra función auxiliar, que denotaremos por H:

$$H : z \in \mathbb{C} \mapsto H(z) = \begin{cases} h(z) := \int_\Gamma g(z,w)dw & \text{si } z \in U \\ \\ h^*(z) := \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw & \text{si } z \in V \end{cases}$$

donde g es la función considerada en los lemas anteriores. Veamos cómo H está bien definida en $\mathbb{C}$. Para ello veamos cómo las funciones h y h^* coinciden en $V \cap U$. En efecto, para todo $z \in V \cap U$ se tiene que $\acute{I}nd_\Gamma(z) = 0$ por lo que $\int_\Gamma \frac{1}{w-z} dw = 0$ y para esos z,

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_\Gamma g(z,w)dw = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{w-z} dw \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = h^*(z). \end{aligned}$$

H es entera pues es holomorfa en cada uno de los abiertos U y V, ya que por los lemas anteriores h es holomorfa en U y h^* es holomorfa en V. Además $U \cup V = \mathbb{C}$.

Veamos ahora cómo H es acotada. La traza de Γ es un conjunto compacto por lo que existe $R_\Gamma > 0$ tal que $\Gamma^* \subset D(0, R_\Gamma)$. Si $|z| > 2R_\Gamma$ entonces $z \in V$ y

$$\begin{aligned} |H(z)| &= |h^*(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \\ &\leq \sup \left\{ \frac{|f(w)|}{|w-z|} : w \in \Gamma^* \right\} long(\Gamma) \leq \\ &\leq \sup\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\} \frac{long(\Gamma)}{R_\Gamma} \end{aligned}$$

pues $|w-z| \geq R_\Gamma$ para todo $w \in \Gamma^*$.

Como H está acotada en el compacto $\overline{D}(0,2R)$ resulta que H es acotada en $\mathbb{C}$ y por el teorema de Liouville H es constante. Veamos cómo H es la constante 0. En efecto, para $R \geq R_\Gamma$ y complejos z de módulo mayor que $2R$ se tiene que

$$|H(z)| \leq \sup\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\}\, long(\Gamma)\frac{1}{R}.$$

Como H es constante, resulta que existe λ tal que $H(z)=\lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con lo que

$$|\lambda| \leq \sup\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\}\, long(\Gamma)\frac{1}{R}$$

y esto para todo $R \geq R_\Gamma$, por lo que necesariamente $\lambda = 0$.

Finalmente, para todo $z \in U \backslash \Gamma^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= H(z) = h(z) = \int_\Gamma g(z,w)dw = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$f(z)\acute{I}nd_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \text{ para todo } z \in U\backslash\Gamma^*.$$

$\square$

Corolario 5.12 (teorema integral de Cauchy global) *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in \mathcal{H}(U)$ y $\Gamma \simeq 0(U)$ entonces $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

En efecto dado $z_0 \in U\backslash\Gamma^*$, aplicamos el anterior resultado a la función $g(z) = f(z)(z-z_0); z \in U$.

Hay un tipo de abiertos muy amplio en el cual todo ciclo es homólogo a 0 en ellos, se trata de los abiertos simplemente conexos que se definen a continuación.

Definición 5.13 *Se dice que $\gamma : [0,1] \to X$ aplicación continua en un espacio topológico X verificando $\gamma(0) = \gamma(1)$ (curva cerrada) es homótopa a una constante si existen un punto $x_0 \in X$ y una aplicación continua $H : [0,1]\times[0,1] \to X$ tal que:*

$H(s,0) = \gamma(s)$ para todo $s \in [0,1]$
$H(s,1) = x_0$ para todo $s \in [0,1]$
$H(0,t) = H(1,t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Se dice que un espacio topológico conexo X es *simplemente conexo* si toda curva cerrada en él es homótopa a una constante.

Puede probarse, pero no es fácil, y no lo haremos aquí, que en todo abierto simplemente conexo todo ciclo es homólogo a 0 (esto puede verse en el Apéndice II de este Manual) y por lo tanto, si U es un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, Γ es un ciclo (arbitrario) en U y $f \in \mathcal{H}(U)$, se verifica que

$$f(z)\acute{I}nd_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw \text{ para todo } z \in U\backslash\Gamma^*$$

y además

$$\int_{\Gamma} f(w)dw = 0.$$

Hay también un teorema de topología que dice que toda curva cerrada $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, inyectiva en $[0,1)$ divide al plano en dos abiertos, siendo uno de ellos simplemente conexo, el que define "la parte de dentro de la curva".

Ese teorema se llama "teorema de la curva de Jordan" y puede verse en algunos libros de topología, pero no en los de topología elementales.

Tema 6

Singularidades aisladas. Desarrollo de Laurent. Teorema de Casorati-Weierstrass

Hasta ahora hemos considerado aplicaciones definidas en un abierto U y derivables en cada punto de él, esto es, funciones holomorfas en U. Ahora vamos a estudiar el comportamiento "cerca" de un punto $z_0 \in U$ de una función $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$. Observamos que f puede estar o no definida en z_0 y que si lo está puede ser continua o no en ese punto. Como ya hemos visto anteriormente, si f es continua en z_0 entonces realmente $f \in \mathcal{H}(U)$.

Con tal fin introducimos el concepto de serie de Laurent (matemático francés, 1813-1854).

Definición 6.1 *Se llama serie de Laurent centrada en un punto z_0 a toda expresión formal del tipo*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C} \backslash \{z_0\}$. La expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

denota de forma abreviada la suma de las series de funciones:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad y \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Nótese que la segunda es una serie de potencias centrada en el punto z_0.

Definición 6.2 *Se dice que una serie de Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *es convergente en un punto* z^* *si las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n} \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^*-z_0)^n$$

son convergentes. De forma análoga se define la convergencia uniforme de las series de Laurent. Si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge en* z^* *el valor de su suma es precisamente*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z^*-z_0)^n := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^*-z_0)^n.$$

En relación con la convergencia de las series de Laurent se tiene el siguiente resultado:

Teorema 6.3 *Dada una serie de Laurent del tipo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *sea*

$$r = \overline{lím}\sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Entonces, si $0 < r < \infty$ *la serie dada converge de forma absoluta y uniforme en cada compacto del conjunto abierto de los puntos* z *tales que* $|z-z_0| > r$*, y no converge en ningún punto* z *tal que* $|z-z_0| < r$*. Si* $r = 0$ *converge uniformemente en cada compacto de* $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ *y si* $r = \infty$ *no converge en ningún punto.*

Demostración. Dado $z^* \in \mathbb{C}$, $|z^*-z_0| > r$ consideramos la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}$ y aplicamos el criterio de la raíz a la serie de los valores absolutos y tenemos

$$\overline{lím}\sqrt[n]{|a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}|} = \overline{lím}\sqrt[n]{|a_{-n}|}|z^*-z_0|^{-1} < r\,\frac{1}{r} = 1,$$

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}$ converge absolutamente. Sea ahora z^* un punto de $\mathbb{C}$ de forma que $|z^*-z_0| < r$, aplicamos el criterio de la raíz a la serie de los valores absolutos y al ser el $\overline{lím}\sqrt[n]{|a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}|} > 1$ la sucesión de números reales $|a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}|$ no converge a cero, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}$ no converge.

Dado un compacto K contenido en $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$, consideramos la aplicación $h(z) = \frac{1}{|z-z_0|}$ definida en $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Por ser h continua y K compacto existe un punto $z_0^* \in K$ tal que $\frac{1}{|z-z_0|} \leq \frac{1}{|z_0^*-z_0|}$ para todo $z \in K$, luego $\frac{|a_{-n}|}{|z-z_0|^n} \leq \frac{|a_{-n}|}{|z_0^*-z_0|^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in K$. Aplicamos el criterio M de Weierstrass y tenemos el resultado.

Si $r = 0$, la serie converge absolutamente en cada $z^* \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ y converge de modo uniforme en los compactos de $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > 0\} = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ y si $r = \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(\frac{1}{z^*-z_0})^n$ no es convergente en ningún $z^* \in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. $\square$

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ y sea

$$r = \overline{lím}\sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Si $0 \leq r < \infty$ podemos definir la función

$$s^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n},$$

en el conjunto abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$, pues la serie converge.

Teorema 6.4 (de derivación) *La función s^* definida de la forma anterior es holomorfa en el conjunto abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$.*

Demostración. Veamos primero cómo es derivable. Para cada n sea

$$s_n^*(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{-k}(z - z_0)^{-k},$$

se verifica que s_n^* es una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ y la sucesión de funciones $\{s_n^*\}$ converge uniformemente en los compactos del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$ a la función s^*, luego por el corolario del teorema de Morera la función s^* es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$. Además por el teorema de Weierstrass la sucesión de funciones $\{s_n^{*\prime}\}$ converge uniformemente en los compactos del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ a la función $s^{*\prime}$, luego en particular en cada punto z del abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ se verifica que

$$s^{*\prime}(z) = \lim_{n\to\infty} s_n^{*\prime}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)a_{-n}(z - z_0)^{-n-1}.$$

$\square$

Teorema 6.5 *Dada la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sean*

$$r = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad y \quad R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Si $r < R$ entonces la serie dada converge de forma absoluta y uniforme en cada compacto de la corona circular

$$C(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

y no converge en ningún punto de $\mathbb{C}\backslash\overline{C(z_0; r, R)}$. Además la función

$$f : z \in C(z_0; r, R) \mapsto f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

es holomorfa en el abierto $C(z_0; r, R)$.

Demostración. Ya sabemos que la serie $s^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ converge de modo absoluto y uniforme en cualquier compacto de $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$ y que s^* es holomorfa en ese abierto. Por otra parte si hacemos $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, esta serie de potencias converge de modo absoluto y uniforme en cualquier compacto contenido en $D(z_0, R)$ con lo que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge de modo absoluto y uniforme en los compactos de la corona $C(z_0; r, R)$ y $f(z) = s^*(z) + s(z)$ es holomorfa en ella.

Si ahora consideramos un punto z^* tal que $r > |z^*-z_0|$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z^*-z_0)^{-n}$ no es convergente, entonces $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z^*-z_0)^n$ no es convergente, y si $|z^*-z_0| > R$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^*-z_0)^n$ no es convergente por lo que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z^*-z_0)^n$ no es convergente. □

Damos ahora un teorema que nos garantiza la existencia de un desarrollo en serie de Laurent para las funciones holomorfas en coronas.

Teorema 6.6 (de Laurent) *Toda función que sea holomorfa en una corona $C(z_0; r^*, R^*)$ admite un único desarrollo en serie de Laurent en ella centrado en z_0, y esa serie converge a la función de modo uniforme en los compactos de la corona. Además, si f es una tal función entonces los coeficientes de su desarrollo de Laurent en torno a z_0 son*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $\rho \in (r^*, R^*)$.

Demostración. Sean r_1 y r_2 dos números reales tales que $0 \leq r^* < r_1 < r_2 < R^*$ y sea Γ el ciclo formado por las circunferencias $C(z_0, r_1)^{op}$ y $C(z_0, r_2)$. Como Γ es homólogo a 0 en el abierto $U = C(z_0; r^*, R^*)$, por la fórmula integral de Cauchy en su versión global, dado que $f \in \mathcal{H}(C(z_0; r^*, R^*))$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad \forall z \in C(z_0; r_1, r_2)$$

(nótese que para los puntos de $C(z_0; r_1, r_2)$ su índice respecto a Γ es 1). Entonces, para todo $z \in C(z_0; r_1, r_2)$ se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Desarrollando $\frac{1}{w-z}$ y $\frac{1}{z-w}$ en serie de potencias con centro en z_0 obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw, \end{aligned}$$

téngase en cuenta que

$$\begin{aligned} g(w) \quad : &= f(w)\frac{1}{w-z} = f(w)\frac{1}{w-z_0-(z-z_0)} \\ &= f(w)\frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= f(w)\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n =: \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w). \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniformemente a g en $C(z_0, r_2)$ pues f está acotada en la circunferencia $C(z_0, r_2)$ y

$$\begin{aligned} g^*(w) &= f(w)\frac{1}{z-w} = f(w)\frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} \\ &= f(w)\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= f(w)\frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k =: \sum_{k=0}^{\infty} g_k^*(w) \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} g_k^*$ converge uniformemente a g^* en $C(z_0, r_1)$ pues f está acotada en la circunferencia $C(z_0, r_1)$ y se puede aplicar en los dos casos el criterio M-Weierstrass. Tenemos entonces que para todo $z \in C(z_0; r_1, r_2)$,

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}&\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n \\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k}}dw\right)(z-z_0)^{-(k+1)} \\ = &\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw\right)(z-z_0)^{-n}. \end{aligned}$$

Como para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$h_n(w) = \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$$

es holomorfa en $C(z_0; r^*, R^*)$ resulta (por la versión global del teorema integral de Cauchy) que si dado $\rho \in (r^*, R^*)$ fijamos r_1 y r_2 tales que $r^* < r_1 < \rho < r_2 < R^*$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw &= \int_{C(z_0,\rho)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\ &= \int_{C(z_0,r_1)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw. \end{aligned}$$

Nótese que los ciclos $\{C(z_0, r_2), C(z_0, \rho)^{op}\}$ y $\{C(z_0, r_1), C(z_0, \rho)^{op}\}$ son ciclos homólogos a 0 en el abierto $U = C(z_0; r^*, R^*)$. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n \quad \forall z \in C(z_0; r^*, R^*).$$

Obsérvese finalmente que hay unicidad del desarrollo de Laurent, lo que se sigue del hecho de que si tenemos otro desarrollo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, en la corona $C(z_0, r^*, R^*)$ entonces hay convergencia uniforme en los compactos de la corona $C(z_0, r^*, R^*)$, y para todo $n_0 \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\frac{1}{2\pi i} f(z)(z-z_0)^{-n_0-1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-n_0-1}$$

y la convergencia sigue siendo uniforme en los compactos de la corona $C(z_0, r^*, R^*)$, integrando a lo largo de $C(z_0, \rho)$, con $r^* < \rho < R^*$, se obtiene que

$$b_{n_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n_0+1}} dw = a_{n_0}.$$

$\square$

Definición 6.7 *Dados un abierto U, un punto z_0 de U y una función $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Se dice que f tiene una* ***singularidad aislada*** *en z_0 si $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$. Nótese que en principio no se sabe si f es derivable o no en z_0, sólo hay seguridad de que f es holomorfa en el abierto $U \backslash \{z_0\}$, de hecho puede que f no esté definida en z_0.*

Las funciones holomorfas en el abierto $U \backslash \{z_0\}$ tienen, por el teorema de Laurent, un desarrollo en serie de Laurent válido en la corona $C(z_0; 0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U))$, esto es,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U)) \backslash \{z_0\} = C(z_0; 0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U))$, siendo además la convergencia de la serie uniforme en cada compacto de $D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U)) \backslash \{z_0\}$. Esto se sigue del teorema de Laurent con $r = 0$. Se llama **parte principal** del desarrollo de Laurent de f en z_0 a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$, esta serie es uniformemente convergente en los compactos de $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ y $s^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$.

Definición 6.8 *Si $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es su desarrollo en serie de Laurent en torno a z_0, entonces:*

a) Si $a_{-n} = 0$ para todo $n = 1, 2...$ se dice que f tiene en z_0 una *singularidad evitable.*
b) Si existe $k = 1, 2...$ tal que $a_{-k} \neq 0$ y $a_{-j} = 0$ para todo $j > k$, se dice que f tiene un *polo de orden* k en z_0.
c) Si $a_{-n} \neq 0$ para infinitos n, se dice que f tiene en z_0 una *singularidad esencial.*

Ejemplos: $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 2 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ tiene una singularidad evitable en 0, $f(z) = \frac{1}{z^3}$ tiene un polo de orden 3 en 0, y $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en 0.

Si $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es su desarrollo en serie de Laurent en torno a z_0, entonces la función $g(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ es holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$ y tiene una singularidad evitable en z_0.

Los dos teoremas que siguen dan algunas caracterizaciones de las singularidades evitables y los polos.

Teorema 6.9 (de extensión de Riemann) *Para* $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ *equivalen:*

a) La función f tiene una singularidad evitable en z_0.
b) Existe una función $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\widetilde{f} = f$ en $U \backslash \{z_0\}$.
c) La función f es acotada en una corona

$$C(z_0; 0, R_0), \ 0 < R_0 < dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U).$$

d) Existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y es un número complejo.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Dado que f tiene una singularidad evitable en z_0, su desarrollo de Laurent en torno a z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

para los z de $C(z_0; 0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U))$. Es claro que existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y que su valor es a_0, por lo que si definimos

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ a_0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

tenemos una función $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\}) \cap \mathcal{C}(U)$, y por lo tanto $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ y claramente $\widetilde{f} = f$ en $U \backslash \{z_0\}$.

(b)$\Rightarrow$(c) Como $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ esta función está acotada en $D(z_0, \rho)$, $0 < \rho < dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U)$, y por lo tanto que f lo está en la corona $C(z_0; 0, \rho)$.

(c)$\Rightarrow$(a) Los coeficientes a_{-n}, $n = 1, 2...$ del desarrollo de Laurent de f en z_0 son

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} dw$$

para cualquier $\rho,\ 0<\rho<R_0$. Como $|f|$ está acotada por una constante M en $C(z_0;0,R_0)\subset U$, se tiene que

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &\leq \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\frac{f(w)}{(w-z_o)^{-n+1}}\right| : w\in C(z_0,\rho)\right\}2\pi\rho \\ &\leq \frac{1}{2\pi}M\frac{1}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho = M\rho^n. \end{aligned}$$

Esto implica que $a_{-n}=0$ para todo $n=1,2...$ y, en consecuencia, f tiene una singularidad evitable en z_0.

La equivalencia entre (b) y (d) es inmediata. □

Teorema 6.10 *Para una función $f\in\mathcal{H}(U\backslash\{z_0\})$ equivalen:*

a) La función f tiene un polo de orden k en z_0.

b) Existe el $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k$ y es un número complejo distinto de cero.

c) Existe una función $\varphi\in\mathcal{H}(U)$ tal que $\varphi(z_0)\neq 0$ y

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}\ \textit{para}\ z\in U\backslash\{z_0\}.$$

Demostración. (a)⇒(b) Dado que f tiene un polo de orden k en el punto z_0, se verifica que

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n;\ z\in D(z_0, dist(z_0,\mathbb{C}\backslash U)\backslash\{z_0\}.$$

Entonces

$$f(z)(z-z_0)^k=\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+k}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-z_0)^n$$

con lo que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=a_{-k}\neq 0$.

(b)⇒(c) Basta definir

$$\varphi(z)=\begin{cases} f(z)(z-z_0)^k & \text{si } z\neq z_0 \\ \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k & \text{si } z=z_0. \end{cases}$$

Esta función φ es continua en U y holomorfa en $U\backslash\{z_0\}$, luego es holomorfa en U y $a_{-k}=\varphi(z_0)\neq 0$.

(c)⇒(a) Sabemos que $\varphi\in\mathcal{H}(U)$ y por lo tanto

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n;\ z\in D(z_0, dist(z_0,\mathbb{C}\backslash U)),\ a_0=\varphi(z_0)\neq 0$$

y entonces

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}; \; z \in D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C}\backslash U))\backslash\{z_0\}$$

luego la función f tiene en el punto z_0 un polo de orden k pues el coeficiente de $(z-z_0)^n$ es $a_0 \neq 0$. □

Corolario 6.11 *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ y supongamos que f tiene en z_0 un cero de orden k. Entonces $\frac{1}{f}$ tiene en z_0 un polo de orden k.*

Demostración. Sabemos, proposición 3.14, que existe $\psi \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$ tal que $\psi(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, r)$ y $f(z) = \psi(z)(z-z_0)^k$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Por lo tanto

$$\frac{1}{f}(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{\psi(z)}.$$

Se aplica entonces el apartado (c) del teorema con la función $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ y con el abierto $D(z_0, r)$. □

Teorema 6.12 (de Casorati-Weierstrass, 1868) *Si $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{z_0\})$ tiene una singularidad esencial en z_0 entonces para todo $r > 0$, tal que $D(z_0, r) \subset U$, se verifica que $f(D(z_0, r)\backslash\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$.*

Obsérvese lo fuerte que es este resultado; dice, por ejemplo, que si $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ para $z \neq 0$ entonces $f(D(0, \frac{1}{n})\backslash\{0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que dado r en las condiciones del enunciado resulta que $f(D(z_0, r)\backslash\{z_0\})$ no es denso en $\mathbb{C}$, entonces existen $w_0 \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$ tales que

$$f(D(z_0, r)\backslash\{z_0\}) \cap D(w_0, \rho) = \emptyset.$$

En consecuencia la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ verifica que $|g(z)| \leq \frac{1}{\rho}$ $\forall z \in D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ y así la función $\frac{1}{f-w_0}$, que es holomorfa en $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$, tendría en z_0 una singularidad evitable y por tanto podríamos extenderla a una función $\widetilde{g} \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$. Esta función puede tener en z_0 un 0, de orden k (pues no es idénticamente nula) y entonces f tendría un polo de orden k en z_0, o no tener un cero y entonces f tendría una singularidad evitable. En cualquier caso se contradice la hipótesis de que f tiene en z_0 una singularidad esencial. □

Nota 6.13 *También es cierto el recíproco del teorema anterior pues si para todo $r > 0$, tal que $D(z_0, r) \subset U$, se verifica que $f(D(z_0, r)\backslash\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$ no puede suceder que f tenga límite (finito) en z_0, luego no tiene una singularidad evitable, ni tampoco puede tener límite infinito y por lo tanto f no puede tener un polo en z_0.*

Nota 6.14 *Hay un teorema de E. Picard, que afirma que si una función f tiene una singularidad esencial en un punto z_0 entonces para todo $w \in \mathbb{C}$, salvo quizá para uno, existen infinitos puntos de la corona $C(z_0; 0, r)$ cuya imagen es w.*

Definición 6.15 *Dada $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y su serie de Laurent en el punto z_0,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

*se llama **residuo** de f en z_0 al coeficiente a_{-1} de ese desarrollo. Según acabamos de ver*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\rho)} f(z)dz$$

donde ρ es tal que $\overline{D}(z_0, \rho) \subset U$. El residuo de f en z_0 se denotará por $Res(f, z_0)$.

El término residuo se usa porque si uno divide por $2\pi i$ e integra (término a término) la serie de Laurent de f en z_0, a lo largo de una circunferencia de centro z_0 contenida en U, lo que le queda (el residuo) es precisamente a_{-1}.

El residuo de f en el punto z_0 se puede calcular, para el caso de que la función f tenga un polo de orden k en el punto z_0, considerando la función holomorfa en U, $\varphi(z) = f(z)(z - z_0)^k$ para $z \in U \backslash \{z_0\}$ dada en el teorema 6.10, derivándola $k - 1$ y $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \varphi^{k-1)}(z)$.

Teorema 6.16 (de Cauchy de los residuos) *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $S = \{z_1, ..., z_m\}$ un conjunto finito de puntos de U, $f \in \mathcal{H}(U \backslash S)$ y Γ un ciclo en $U \backslash S$, $\Gamma \simeq 0(U)$. Entonces*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \acute{I}nd_\Gamma(z_j) Res(f, z_j).$$

Demostración. Si por cada $j = 1, ..., m$ denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}$ la parte principal de la serie de Laurent de f en z_j entonces la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n}$$

es holomorfa en $U \backslash S$. Nótese que al desarrollo de Laurent en cada uno de los puntos z_j le quitamos su parte principal y lo que queda es una función holomorfa en un entorno perforado* de z_j con una singularidad evitable en z_j. Denotemos por $\widetilde{g}$ la extensión holomorfa de g a U.

*se trata de un abierto del tipo $V \backslash \{z_0\}$.

Dado que el ciclo Γ es homólogo a 0 en U, el teorema integral de Cauchy para la función $\widetilde{g}$, en su versión global, nos da que $\int_\Gamma \widetilde{g} = 0$. Luego, como Γ es un ciclo en $U \backslash S$,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n} dz \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma a_{-n}^{(j)} (z - z_j)^{-n} dz = \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^{m} a_{-1}^{(j)} \acute{I}nd_\Gamma(z_j).
\end{aligned}$$

Recuérdese que $\int_\Gamma (z - z_j)^{-n} = 0$ para todo $n \neq 1$ y que $\int_\Gamma (z - z_j)^{-1} = 2\pi i \acute{I}nd_\Gamma(z_j)$. $\square$

Tema 7

Funciones meromorfas. Principio del argumento. Aplicaciones

Comenzamos el tema con la definición de función meromorfa, luego veremos unos interesantes resultados sobre tales funciones.

Definición 7.1 *Se dice que una función f es* **meromorfa** *en un abierto U de $\mathbb{C}$ si f está definida $U \backslash S$, siendo S un subconjunto de U sin puntos de acumulación en U, es holomorfa en el abierto $U \backslash S$ y tiene un polo en cada punto de S.*

Ejemplos: Las funciones $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ y $h(z) = tg\ \pi z$ son meromorfas en $\mathbb{C}$.

Con el fin de probar un resultado conocido como "el principio del argumento" demostramos los dos lemas siguientes:

Lema 7.2 *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_o \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ y supongamos que f tiene un cero de orden n en z_0. Entonces $\frac{f'}{f}$ tiene en z_0 un polo de orden 1 y $Res\left(\frac{f'}{f}, z_o\right) = n$.*

Demostración. Recordamos que una función f tiene un cero de orden n en z_0 si $f(z_0) = 0,\ f'(z_0), ..., f^{n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{n)}(z_0) \neq 0$.

Si f tiene un cero de orden n en z_0, entonces f se puede escribir en la forma $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ en un entorno de z_0, siendo φ una función holomorfa en un disco $D(z_0, \rho)$ que no se anula en ningún punto de ese disco (Proposición 3.14), con lo que

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1}\varphi(z) + (z - z_0)^n \varphi'(z) \text{ en } D(z_0, \rho).$$

En consecuencia, para $z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}$,

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{(z - z_0)^{n-1}(n\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z))}{(z - z_0)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Como $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es holomorfa en $D(z_0, \rho)$ resulta que $\frac{f'}{f}$ tiene en z_0 un polo de orden 1 y su residuo en ese punto es n. $\square$

Lema 7.3 *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_o \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y supongamos que f tiene un polo de orden m en z_0. Entonces $\frac{f'}{f}$ tiene en z_0 un polo de orden 1 y Res$\left(\frac{f'}{f}, z_o\right) = -m$.*

Demostración. Como f tiene en z_0 un polo de orden m existe φ holomorfa en un disco $D(z_0, \rho)$ tal que $\varphi(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, \rho)$,

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z) \quad \forall z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}.$$

Entonces

$$f'(z) = \varphi'(z)(z - z_0)^{-m} - m(z - z_0)^{-m-1} \varphi(z) \quad \forall z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}$$

con lo que

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{-m}{z - z_0} \quad \forall z \in D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}.$$

Como $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es holomorfa en $D(z_0, \rho)$ resulta que $\frac{f'}{f}$ lo es en $D(z_0, \rho) \backslash \{z_0\}$ y $\frac{f'}{f}$ tiene en z_0 un polo de orden 1 con residuo $-m$. $\square$

Teorema 7.4 (Principio del argumento) *Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $S = \{z_1, ..., z_p\}$ y $S^* = \{z_1^*, ..., z_q^*\}$ dos subconjuntos (finitos) de U, $f \in \mathcal{H}(U \backslash S)$ de forma que f tiene un polo en cada punto de S y S^* es el conjunto de los ceros de f. Entonces para todo ciclo Γ en $U \backslash (S \cup S^*)$, $\Gamma \simeq 0(U)$, se verifica que*

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{q} Ind_\Gamma(z_j^*) \cdot n_j - \sum_{j=1}^{p} Ind_\Gamma(z_j) \cdot m_j \right]$$

donde n_j es el orden del cero que f tiene en z_j^* y m_j es el orden del polo que f tiene en z_j.

Demostración. Consideremos la función

$$\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(U \backslash (S \cup S^*)).$$

El teorema de Cauchy de los residuos nos da que

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{q} Ind_\Gamma(z_j^*) \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_j^* \right) + \sum_{j=1}^{p} Ind_\Gamma(z_j) \cdot \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_j \right) \right].$$

Basta entonces sustituir Res$\left(\frac{f'}{f}, z_j^*\right)$ y Res$\left(\frac{f'}{f}, z_j\right)$ por sus valores respectivos. $\square$

Nota 7.5 *Si* $\acute{I}nd_\Gamma(z_j^*) = 1$ *e* $\acute{I}nd_\Gamma(z_j) = 1$ *para todo* j *entonces*

$$\int_\Gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{p} n_j - \sum_{j=1}^{q} m_j \right]$$

esto es, $\int_\Gamma \frac{f'}{f}$ nos indica la diferencia entre el número de ceros $\mathcal{Z}$ y polos $\mathcal{P}$ de f "dentro" de Γ contados con sus multiplicidades. Este resultado se conoce también como "teorema del indicador logarítmico". El cociente $\frac{f'}{f}$ se llama normalmente cociente logarítmico (es la derivada del $Log_\theta\ f$) y su integral en Γ nos da la diferencia entre el número de ceros y el de polos que tiene f "dentro" de Γ.

Nota 7.6 *Veamos por qué se llama al teorema anterior "principio del argumento". Si* $\gamma : [a, b] \to U$ *es un camino y consideramos la composición* $f \circ \gamma$ *(*f *en las condiciones del teorema) obtenemos un nuevo camino, y como sabemos, toda aplicación continua en un intervalo tiene un logaritmo continuo y este logaritmo es derivable si el camino es derivable. Sea entonces* h *derivable en* $[a, b]$ *tal que*

$$e^{h(t)} = f \circ \gamma(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Derivando obtenemos que

$$h'(t) = \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Esto nos da que

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f'}{f} &= \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t) \\ &= \int_a^b h'(t)dt \\ &= h(b) - h(a). \end{aligned}$$

Como γ *es cerrado* $f \circ \gamma(b) = f \circ \gamma(a)$ *y, en consecuencia,*

$$e^{h(b)-h(a)} = 1$$

de donde se sigue que $h(b) - h(a) = 2k\pi i$ *para un cierto* $k \in \mathbb{Z}$*. Este entero* k *representa la variación del argumento (módulo* $2\pi i$*) de* $f \circ \gamma(t)$ *cuando* t *recorre el intervalo* $[a, b]$*.*

El anterior teorema tiene una consecuencia importante que es el siguiente teorema:

Teorema 7.7 (de Rouché) *Sean* f *y* g *funciones holomorfas en un abierto* U *y sea* $\overline{D}(z_0, r) \subset U$*. Si* $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ *para todo* $z \in \partial D(z_0, r)$*, entonces* f *y* g *tienen la misma cantidad de ceros en* $D(z_0, r)$ *(esto es, la suma de las multiplicidades de los órdenes de los ceros de* f *y de* g *coiciden).*

Demostración. Por la condición requerida en la frontera del disco, la función f no se anula en ningún punto de ella, pues de lo contrario sucedería que $|0 - g(z)| < 0$ en esos puntos, lo que no es posible. Podemos entonces dividir por $f(z)$ para $z \in \partial D(z_0, r)$ y se verifica que:

$$\left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{f(z) - g(z)}{f(z)}\right| < 1 \text{ para todo } z \in \partial D(z_0, r).$$

Si ahora denotamos por γ_r la circunferencia de centro z_0 y radio r, tenemos que $\frac{g}{f} \circ \gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es un camino cerrado cuya traza queda contenida en $D(1,1)$ y por lo tanto $\acute{I}nd_{\frac{g}{f}\circ\gamma_r}(0) = 0$, con lo que

$$\begin{aligned}
0 &= 2\pi i \acute{I}nd_{\frac{g}{f}\circ\gamma_r}(0) = \int_{\frac{g}{f}\circ\gamma_r} \frac{1}{w} dw = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{g}{f} \circ \gamma_r\right)'(t)}{\frac{g}{f} \circ \gamma_r(t)} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{g}{f}\right)'(\gamma_r(t))\gamma_r'(t)}{\frac{g}{f}(\gamma_r(t))} dt = \int_{\gamma_r} \frac{\left(\frac{g}{f}\right)'}{\frac{g}{f}}(w) dw \\
&= \int_{\gamma_r} \frac{\frac{g'f - f'g}{f^2}(w)}{\frac{g}{f}(w)} dw = \int_{\gamma_r} \frac{g'f - f'g}{fg}(w) dw \\
&= \int_{\gamma_r} \frac{g'}{g} - \int_{\gamma_r} \frac{f'}{f}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_{\gamma_r} \frac{g'}{g} = \int_{\gamma_r} \frac{f'}{f}.$$

Consideramos el abierto y conexo $D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C}\backslash U))$ y el $\overline{D}(z_0, \varrho)$, donde ϱ es mayor que r y menor que $dist(z_0, \mathbb{C}\backslash U)$, entonces las funciones f y g tienen un número finito de ceros en el compacto $\overline{D}(z_0, \varrho)$, y por tanto en $D(z_0, \varrho)$. Denotemos por S_f^* y S_g^* los conjuntos (finitos) de ceros de f y g en $D(z_0, \varrho)$ respectivamente. Ninguno de los ceros de f y de g está en $\partial D(z_0, r)$ (ya lo hemos visto). Se aplica el teorema anterior al abierto $D(z_0, \varrho)$ y al camino cerrado γ_r en $D(z_0, \varrho) \backslash S_f^*$, y en $D(z_0, \varrho) \backslash S_g^*$ y $\gamma_r \simeq 0(D(z_0, \varrho))$. Obsérvese que ni f ni g tienen polos en $D(z_0, \varrho)$ y que el índice de los ceros de f y g respecto al camino cerrado γ_r que no están en $D(z_0, r)$ es cero, para los que están en ese disco es 1. Luego como $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f'}{f}$ es la cantidad de ceros de f en $D(z_0, r)$ y $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{g'}{g}$ es la cantidad de ceros de g en $D(z_0, r)$, ambas cantidades coinciden. $\square$

Obtenemos ahora un resultado que relaciona la cantidad de ceros del límite de una sucesión de funciones holomorfas con los de las funciones de la sucesión.

Teorema 7.8 (de Hurwitz) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto U que converja uniformemente en los compactos de U a una función f $(\in \mathcal{H}(U))$.*

Supongamos que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ *y que* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \in \partial D(z_0, r)$*. Entonces, a partir de un cierto* n_0 *las correspondientes* f_n *tienen en* $D(z_0, r)$ *la misma cantidad de ceros que* f *(contando las multiplicidades).*

Demostración. Como f es continua en el compacto $\partial D(z_0, r)$ existe $z^* \in \partial D(z_0, r)$ tal que

$$0 < |f(z^*)| = \text{ínf}\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$$

nótese que $f(z^*) \neq 0$. Dado que $f_n \to f$ uniformemente en el compacto $\partial D(z_0, r)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z^*)| \leq |f(z)|$$

para todo $z \in \partial D(z_0, r)$ y para todo $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.

El resultado se sigue entonces del teorema de Rouché. Obsérvese que siempre los ceros se cuentan de acuerdo con sus órdenes de multiplicidad. □

Tema 8

Principio del módulo máximo. El teorema de la aplicación abierta. Lema de Schwarz. Aplicaciones biholomorfas

Obtendremos en este tema unos teoremas de los más sorprendentes y útiles de la teoría de variable compleja. Comenzamos con el llamado teorema del módulo máximo, para su demostración utilizaremos el siguiente lema.

Lema 8.1 *Supongamos que f es una función holomorfa en un abierto conexo U y que $|f(z)| = M$ para todo $z \in U$, entonces f es constante en U.*

Demostración. Si $M = 0$ entonces f sería idénticamente nula y por lo tanto constante. Supongamos entonces que $M \neq 0$. El que $|f(z)| = M$ nos dice que $f(z)\overline{f}(z) = M^2$. Con lo que $\overline{f} = \frac{M^2}{f}$ es holomorfa en U y se sabe que si f y $\overline{f}$ son holomorfas entonces f es constante, pues $g = f + \overline{f} = 2\operatorname{Re}(f) + 0i$ es una función holomorfa en un abierto conexo con parte imaginaria 0, lo que implica que $\operatorname{Re}(g) = 2\operatorname{Re}(f)$ es constante y por tanto también $\operatorname{Re}(f)$. El que una función holomorfa con parte real constante es constante es consecuencia directa de las condiciones de Cauchy-Riemann (nótese que U es conexo). $\square$

Teorema 8.2 (del módulo máximo) *Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ y supongamos que existe un punto $z_0 \in U$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in U$. Entonces f es constante en U.*

Demostración. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset U$. Veamos cómo $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Para cada $\rho \in (0, r)$, la fórmula integral de Cauchy nos da que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(w)}{w-z_0}dw\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|dt \\
&= |f(z_0)|.
\end{aligned}
$$

De aquí se sigue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0+\rho e^{it})|)dt = 0.$$

Tenemos así que para todo $\rho \in [0,r)$ la integral de la función no negativa y continua $h_\rho(t) = |f(z_0)| - |f(z_0+\rho e^{it})|,\ t \in [0,2\pi]$, es 0, entonces necesariamente $h_\rho(t) = 0$ para todo $t \in [0,2\pi]$, de donde se sigue que

$$|f(z_0+\rho e^{it})| = |f(z_0)|$$

para todo $\rho \in (0,r)$ y todo $t \in [0,2\pi]$. En efecto, fijado $\rho \in (0,r)$ estamos integrando una función continua, mayor o igual que 0, si ella no fuese 0 en un punto t_0 sería estrictamente mayor que 0 en un entorno de t_0 y entonces la integral sería estrictamente positiva.

Sabemos, por el Lema anterior, que si $|f|$ es constante en $D(z_0,r)$ entonces f es constante en ese disco, y así, por el primer teorema de identidad, tenemos que f es constante en U. $\square$

Corolario 8.3 *Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ y supongamos que existe un punto $z_0 \in U$ y $\rho > 0$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in D(z_0,\rho)$. Entonces f es constante en U. Es decir, si hay un máximo relativo también f es constante.*

Demostración. Basta aplicar el primer teorema de identidad. En efecto, se aplica el teorema anterior al abierto y conexo $D(z_0,\rho)$ y se obtiene que f es constante en $D(z_0,\rho)$ con lo que f es también constante en U. $\square$

No podemos esperar un teorema análogo al anterior para el caso de un mínimo, pues $f(z) = z$, verifica que su módulo tiene un mínimo absoluto en $z = 0$, pues $0 \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y sin embargo f no es constante. A pesar de eso se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.4 *Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ y supongamos que existe un punto $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) \neq 0$ y $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$. Entonces f es constante en U.*

Demostración. Como $f(z_0) \neq 0$, para todo $z \in U$ se verifica que $f(z) \neq 0$. Entonces

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \ z \in U$$

es holomorfa en U y $|g(z_0)| \geq |g(z)|$ para todo $z \in U$, por lo que g es constante en U y en consecuencia f es también constante en U. □

Corolario 8.5 *Sea U un abierto acotado y sea $f \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$. Entonces se verifica que:*

$$\sup\{|f(z)| : z \in U\} = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} = \sup\{|f(z)| : z \in \partial U\}.$$

Demostración. Como $\overline{U}$ es compacto existe $z_0 \in \overline{U}$ tal que

$$|f(z_0)| = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\}.$$

Dado que $z_0 \in \overline{U}$ existe $z_n \subset U$ tal que $z_n \to z_0$ y entonces $|f(z_n)| \to |f(z_0)|$. Como $|f(z_n)| \leq \sup\{|f(z)| : z \in U\}$ y $|f(z_0)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq \sup\{|f(z)| : z \in U\}$ se tiene que

$$\sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} = |f(z_0)| \leq \sup\{|f(z)| : z \in U\},$$

con lo que $|f(z_0)| = \sup\{|f(z)| : z \in U\}$.

Tenemos así la primera de las igualdades. Obsérvese que esa igualdad la verifican todas las funciones continuas.

Veamos ahora la segunda igualdad. Como $\partial U \subset \overline{U}$ sólo nos falta ver que $\sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\} \leq \sup\{|f(z)| : z \in \partial U\}$. Si el anterior punto $z_0 \in \overline{U}$ está en ∂U no hay nada que hacer, si está en U f será constante en el conexo $D(z_0, dist(z_0, \partial U))$ y así será constante también en la frontera de ese disco, esa frontera tiene algún punto de la frontera de U. Entonces, en algún punto de la frontera de U el módulo de f es precisamente $|f(z_0)|$ que es el $\sup\{|f(z)| : z \in \overline{U}\}$. □

Observamos que la acotación de U es importante pues $f(z) = e^z$ es holomorfa en $\{x + iy : x > 0\}$ y continua en $\{x + iy : x \geq 0\}$ y sin embargo $\sup\{|f(z)| : z \in \partial U\} = 1$, mientras que $\sup\{|f(z)| : z \in U\} = \infty$. También es importante la holomorfía de f, pues la función

$$f(z) = \ 1 - |z| \ \text{ si } z \in \overline{D}(0, 1)$$

es continua en $\overline{D}(0, 1)$ y sin embargo, $\sup\{|f(z)| : z \in \partial U\} = 0$, pero

$$\sup\{|f(z)| : z \in U\} = 1.$$

En el caso real las funciones inyectivas y derivables pueden tener derivada 0 en algún punto, por ejemplo en la función $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, esto no puede ocurrir en el caso complejo como muestra el siguiente teorema.

Teorema 8.6 *Si f es una función holomorfa e inyectiva en un abierto U entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) = 0$. Aplicamos el segundo corolario del segundo teorema de identidad (3.12 al abierto conexo $D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U))$ y a la función holomorfa no constante f' (si f' fuese constante en $D(z_0, dist(z_0, \mathbb{C} \backslash U))$, sería igual a 0 y entonces f sería constante en él, lo que no es posible pues f es inyectiva) y obtenemos que existe $r > 0$ tal que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Hagamos

$$m = \text{ínf}\{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial D(z_0, r)\} = |f(z_0^*) - f(z_0)|$$

para un cierto $z_0^* \in \partial D(z_0, r)$ (continuidad en un compacto). Nótese que $m > 0$ al ser f inyectiva.

Consideremos dos funciones auxiliares:

$$F : z \in U \mapsto f(z) - f(z_0) \quad \text{y} \quad G : z \in U \mapsto f(z) - f(z_0) - \frac{m}{2}.$$

Ambas funciones son holomorfas en U y para todo $z \in \partial D(z_0, r)$ se verifica que

$$|G(z) - F(z)| = \frac{m}{2} < m \leq |f(z) - f(z_0)| = |F(z)|$$

con lo que, por el teorema de Rouché, tenemos que F y G tienen la misma cantidad de ceros contados con sus órdenes de multiplicidad en $D(z_0, r)$. Ahora bien, F tiene por lo menos dos ceros en $D(z_0, r)$ (nótese que $F(z_0) = 0$ y $F'(z_0) = 0$) por lo que G tiene al menos dos ceros en ese disco. Como para todo $z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ se tiene que $G'(z) \neq 0$, necesariamente los ceros de G en ese disco son simples (nótese que $G(z_0) \neq 0$), por lo que existen z_1 y $z_2 \in D(z_0, r)$, $z_1 \neq z_2$, tales que $G(z_1) = G(z_2) = 0$. Esto implica que $f(z_1) = f(z_2)$ lo que no es posible pues f es inyectiva. □

Otro teorema característico de las funciones holomorfas es el siguiente:

Teorema 8.7 (de la aplicación abierta) *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa en U que no sea constante, entonces $f(U)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Fijamos un punto $z_0 \in U$ y probaremos que existe $\rho > 0$ tal que $D(f(z_0), \rho) \subset f(U)$.

Dado que f no es constante en el abierto conexo U existe (por el segundo corolario del segundo teorema de identidad) $r > 0$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$ para todo $z \in \overline{D}(z_0, r) \backslash \{z_0\}$. Sea, como en el teorema anterior,

$$m = \text{ínf}\{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial D(z_0, r)\} = |f(z_0^*) - f(z_0)|$$

para un cierto $z_0^* \in \partial D(z_0, r)$ (continuidad en un compacto). Nótese que $m > 0$ al ser $f(z_0^*) \neq f(z_0)$. Vamos a comprobar que si tomamos $\rho = m$ tenemos lo que queremos. En efecto, dado $w \in D(f(z_0), \rho)$ consideremos las funciones (la primera no depende de w)

$$F : z \in U \mapsto f(z) - f(z_0) \quad \text{y} \quad G : z \in U \mapsto f(z) - w.$$

F y G son funciones holomorfas en U y para todo $z \in \partial D(z_0, r)$ se verifica que

$$|F(z) - G(z)| = |f(z_0) - w| < m \leq |f(z) - f(z_0)| = |F(z)|$$

y así, por el teorema de Rouché tenemos que F y G tienen la misma cantidad de ceros en $D(z_0, r)$. Como F tiene al menos un cero en $D(z_0, r)$ (el z_0) existe un punto $z_1 \in D(z_0, r)$ tal que $G(z_1) = 0$, esto es, $f(z_1) = w$, luego $w \in f(U)$. □

Observamos que la función $f(x) = \text{sen}(x)$ es analítica en $\mathbb{R}$, no es constante y sin embargo $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ que no es un abierto de $\mathbb{R}$.

Corolario 8.8 *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces f es abierta, esto es, $f(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ para todo abierto V contenido en U.*

Demostración. Sea V un abierto de U entonces $V = \bigcup_{z \in V} D(z, dist(z, \partial V))$ así $f(V) = \bigcup_{z \in V} f(D(z, dist(z, \partial V)))$. Aplicamos el teorema de la aplicación abierta al $D(z, dist(z, \partial V))$ que es un abierto y conexo y a la función f que no es constante en $D(z, dist(z, \partial V))$, pues es inyectiva, y entonces $f(D(z, dist(z, \partial V)))$ es un abierto y por tanto también $f(V)$ es abierto. □

Observación. Si f es una función holomorfa e inyectiva en U, entonces f es una aplicación biyectiva y holomorfa entre U y $f(U)$. La inversa de f, f^{-1}, que está definida en $f(U)$, es continua, pues su inversa (la inversa de la inversa) es abierta, es decir, f lleva abiertos en abiertos. Vamos a ver ahora que la inversa de f es también holomorfa.

Teorema 8.9 *Si f es una función holomorfa e inyectiva en un abierto U, entonces f^{-1} es holomorfa en el abierto $f(U)$. Además si $w_0 = f(z_0) \in f(U)$ entonces $\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

Demostración. Sea $w_0 = f(z_0)$ y $w = f(z) \in f(U)$. Entonces,

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{f^{-1}(f(z)) - f^{-1}(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \quad (*)$$

Para cada sucesión $\{w_n\}$ de $f(U)$ que converge a w_0, $w_n \neq w_0$ para todo n se verifica que $\{z_n\} = \{f^{-1}(w_n)\}$ converge a $z_0 = f(w_0)$ (pues f^{-1} es continua en w_0), $z_n \neq z_0$ para todo n y como existe el

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

y es distinto de 0, existe el

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Luego, utilizando esta igualdad y $(*)$ para $z_n = f^{-1}(w_n)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0}$$

Así f^{-1} es derivable en w_0 y

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

□

Si se suprime la hipótesis de inyectividad se puede al menos obtener el siguiente:

Teorema 8.10 *(de la inversa local). Si f es holomorfa en U y para un punto $z_0 \in U$ se verifica que $f'(z_0) \neq 0$ entonces existen abiertos V y $D(f(z_0), \rho)$, V entorno de z_0, tales que f es biyectiva de V en $D(f(z_0), \rho)$ y $(f|_V)^{-1}$ es holomorfa en $D(f(z_0), \rho)$.*

Demostración. Consideremos el abierto y conexo $D(z_0, dist(z_0, \partial U)) \subset U$ y la función holomorfa f en el disco, no constante en él (nótese que $f'(z_0) \neq 0$). Del corolario del segundo teorema de identidad (Corolario 3.12) podemos deducir que existe un disco $\overline{D}(z_0, r)$, tal que

$$f(z) \neq f(z_0) \text{ para todo } z \in \overline{D}(z_0, r)\backslash\{z_0\}. \tag{1}$$

Sea

$$m = \text{ínf}\{|f(z) - f(z_0)| : z \in \partial D(z_0, r)\} > 0$$

pues ese ínfimo se alcanza, por compacidad. Sean $\rho = m$ y

$$V = f^{-1}(D(f(z_0), m)) \cap D(z_0, r),$$

V es abierto y $f(V) \subset D(f(z_0), m)$, veamos como f es biyectiva de V en $D(f(z_0), m)$. Obtendremos esto a partir del teorema de Rouché: Probaremos que para cualquier punto $w \in D(f(z_0), m)$ existe un único $z \in V$ tal que $f(z) = w$. Para ello consideremos las funciones $F(z) = f(z) - f(z_0)$ y $G(z) = f(z) - w$. Ambas son holomorfas en U y para todo $z \in \partial D(z_0, r)$, se verifica:

$$|F(z) - G(z)| = |f(z_0) - w| < m \leq |f(z) - f(z_0)| = |F(z)|,$$

luego F y G tienen en $D(z_0, r)$ la misma cantidad de ceros. Como $F'(z_0) \neq 0$, por (1), F tiene exactamente un cero en ese disco, entonces hay un único punto z en $D(z_0, r)$ tal que $G(z) = 0$, esto es $f(z) = w$, y además $z \in f^{-1}(D(f(z_0), m))$. El hecho de que $(f|_V)^{-1}$ sea holomorfa en $D(f(z_0), \rho)$ es consecuencia del teorema anterior. □

Obtenemos ahora un resultado conocido como "el Lema de Schwarz" que fue obtenido (por Schwarz, matemático alemán, 1843-1921) para resolver un "gap" que había en la demostración de Riemann del hoy conocido como "Teorema de Representación Conforme de Riemann", que prueba que dado cualquier abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$, que no sea el propio $\mathbb{C}$, existe una aplicación biyectiva y holomorfa entre él y el disco unidad, (este resultado se prueba en la asignatura de ANCP). El Lema de Schwarz tiene además interés por si mismo como veremos enseguida. Hay incluso algún libro dedicado enteramente a ese lema y sus generalizaciones.

Teorema 8.11 *(Lema de Schwarz) Sea $f : D(0,1) \to \overline{D}(0,1)$ una función holomorfa en $D(0,1)$ tal que $f(0) = 0$. Entonces*

a) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$. Obsérvese que esto implica que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$.
b) $|f'(0)| \leq 1$.
c) Si para algún $z_0 \in D(0,1)\backslash\{0\}$ se verifica que $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$
d) Ocurre lo mismo que en (c) si $|f'(0)| = 1$.

Demostración. a) Consideremos la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Esta función g es continua en $D(0,1)$ pues

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) = g(0).$$

Como además g es holomorfa en $D(0,1)\backslash\{0\}$ es holomorfa en $D(0,1)$. Por cada $r \in (0,1)$ y $z \in \partial D(0,r) \subset D(0,1)$ se verifica que

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

Por el corolario del teorema del módulo máximo para cada $r \in (0,1)$ se verifica

$$\sup\{|g(z)| : z \in \overline{D(0,r)}\} = \sup\{|g(z)| : z \in \partial D(0,r)\} = \sup\{|g(z)| : z \in D(0,r)\}.$$

Dado $z_0 \in D(0,1)$ se verifica que $z_0 \in D(0,r)$, para todo $r \in (|z_0|, 1)$, luego $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$ por (*). El hecho de que se verifique $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$ para todo $r \in (|z_0|, 1)$ nos da que $|g(z_0)| \leq \lim_{r\to 1} \frac{1}{r} = 1$. Por lo tanto a) y b) se verifican.

c) Supongamos que existe $z_0 \in D(0,1)\backslash\{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces $|g(z_0)| = 1$. Como $|g(z)| \leq 1$ para todo z, $|z| < 1$, resulta que $|g|$ alcanza su valor máximo en $z_0 \in D(0,1)\backslash\{0\}$, luego g es constante (teorema del módulo máximo), esa constante, llamémosla λ es de módulo 1, pues $|g(z_0)| = 1$. En consecuencia $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$.

d) Si $|f'(0)| = 1$ entonces $|g(0)| = 1$ por lo que estamos como en (c). □

Definición 8.12 *Se dice que una aplicación $f : D(0,1) \to D(0,1)$ es un automorfismo del disco unidad si f es una aplicación biyectiva y holomorfa.*

Obsérvese que al ser f inyectiva su inversa sobre su imagen (que es $D(0,1)$) es también holomorfa por un teorema anterior.

Ejemplos:

1) $f(z) = \lambda z$ siendo λ cualquier número complejo de módulo 1 que denotaremos por $g_\lambda(z)$.

2) Por cada $\alpha \in D(0,1)$ consideremos la aplicación:

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}; \; z \in D(0,1)$$

Esta aplicación lleva el disco unidad en si mismo, lo que ya se ha visto en el Ejercicio 4 de la Hoja 1.

Esta aplicación es sobreyectiva, pues dado $w \in D(0,1)$ el complejo $z = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}$ es igual a $\varphi_{-\alpha}(w)$ y por lo tanto $z \in D(0,1)$. Se verifica que $\varphi_\alpha(z) = w$. Tal z es único, luego φ_α es inyectiva. Observamos que $(\varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{-\alpha}$.

Bien, la verdad es que no hay muchos más automorfismos del disco unidad, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 8.13 *(Caracterización de los automorfismos del disco unidad). Todo automorfismo φ del disco unidad es de la forma*

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

para ciertos $\alpha \in D(0,1)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.

Demostración. Supongamos que dado un automorfismo φ del disco unidad, éste verifica que $\varphi(0) = 0$. Entonces, por el Lema de Schwarz, $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$. Como φ^{-1} es también un automorfismo de $D(0,1)$ y $\varphi^{-1}(0) = 0$, se tiene que $|\varphi^{-1}(w)| \leq |w|$ para todo $w \in D(0,1)$ y entonces

$$|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)| \text{ para todo } z \in D(0,1)$$

con lo que $|\varphi(z)| = |z|$ para todo $z \in D(0,1)$, luego por el propio Lema de Schwarz φ es de la forma $\varphi(z) = g_\lambda(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$ con un cierto λ de módulo 1. En este caso se toma $\alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\varphi(0) = \beta \neq 0$. Entonces

$$\phi = \varphi_\beta \circ \varphi$$

es un nuevo automorfismo del disco unidad que lleva el 0 en el 0 y por lo tanto existe λ de módulo 1 tal que $\phi(z) = g_\lambda(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$. Entonces

$$\varphi(z) = \varphi_{-\beta}(\phi(z)) = \varphi_{-\beta}(\lambda z) = \frac{\lambda z + \beta}{1 + \overline{\beta}\lambda z} = \lambda \frac{z + \frac{\beta}{\lambda}}{1 + \overline{(\frac{\beta}{\lambda})} z} \ \forall z \in D(0,1)$$

basta para ello tener en cuenta que $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Si tomamos $\alpha = \frac{-\beta}{\lambda}$ tenemos el resultado. $\square$

Tema 9

Funciones armónicas. El problema de Dirichlet para un disco. Desigualdades de Harnak

Dedicamos este tema a estudiar las funciones armónicas. Es un tipo de funciones de gran interés en la física y en el estudio de ellas las funciones de variable compleja son una herramienta fundamental.

Definición 9.1 *Se dice que una función* $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es* ***armónica*** *si existen las derivadas parciales de primer y segundo orden de* u*, son continuas y verifican la ecuación de Laplace:* $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *en* U*.*

Ejemplos:

1. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ entonces $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ es una función armónica en U. Lo mismo le ocurre a $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Esto se sigue así: Al ser f holomorfa en U,
$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i(-1)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$
por la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Luego u tienen derivadas parciales de primer orden y éstas son continuas (pues f' es continua). Aplicamos el mismo argumento a la función f' y obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $(-1)\frac{\partial u}{\partial y}$ tienen derivada parciales de primer orden y son continuas, esto es, u es de clase $\mathcal{C}^2$ en el abierto U. Aplicamos la primera de las ecuaciones de Cauchy-Riemann a la función f' cuyas partes real e imaginaria son respectivamente $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

esto es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } U.$$

es decir, u es armónica. Para v se verifica que es la parte real de la función holomorfa $(-i)f$.

2. Si $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la función $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ es armónica en U.

Típicos ejemplos de funciones armónicas los proporcionan, la función que da el potencial de un campo gravitacional, la que da la temperatura en una lámina, el potencial electrostático en una región libre de cargas (Churchill-Brown, p. 69), etc. Más ejemplos se ven en las asignaturas de ecuaciones en derivadas parciales.

Mientras que, como acabamos de ver, la parte real de una función holomorfa es armónica, no es cierto, en general, que toda función armónica sea la parte real de una función holomorfa, aunque, como vemos a continuación, sí lo es localmente.

Teorema 9.2 *Sea u una función armónica en U siendo U un disco $D(z_0, r)$ o $\mathbb{C}$. Entonces existe una función holomorfa f en U cuya parte real es u.*

Demostración. Consideremos

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)ds.$$

Esta v tiene parciales continuas y verifica, con respecto a u, las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, por una parte, se sigue de la Regla de Leibniz de derivación bajo la integral (Teorema 4.15), del teorema fundamental del Cálculo Integral y la regla de Barrow, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) \\
&\overset{(u \text{ armónica})}{=} -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x,t)dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),
\end{aligned}$$

por otra parte, se sigue del teorema fundamental del Cálculo Integral, que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

Luego v tiene parciales continuas y por lo tanto es diferenciable en el abierto U, igual que u. Además al verificarse las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función $f := u + iv$ por un teorema anterior f es holomorfa en U. $\square$

Definición 9.3 *Se dice que una función armónica u en un abierto U tiene una armónica conjugada en U si existe una función armónica v en U tal que $u+iv$ es holomorfa en U.*

No es cierto en general, que toda función armónica tenga una armónica conjugada: la función $u(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ no es la parte real de ninguna función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. De serlo, habría una determinación continua del logaritmo en un disco centrado en 0 y sabemos que esto no es posible.

Nosotros probaremos a lo largo de la lección un resultado del cual se sigue el resultado anterior. Vamos a formular ahora un clásico resultado que en su tiempo fue un interesante problema planteado por la física. Se trata del llamado "problema de Dirichlet" (Peter G. Dirichlet, Alemania, 1805-1859). El problema es el siguiente:

"Dada una función continua ψ definida en la frontera del disco unidad y con valores en $\mathbb{R}$, ¿existe alguna función $u : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$, continua en $\overline{D}(0,1)$, armónica en $D(0,1)$ que coincida con ψ en $\partial D(0,1)$?"

Para mostrar una solución a este problema necesitamos algunas definiciones y resultados auxiliares.

Definición 9.4 *Se llama **núcleo de Poisson** a la función P definida por*

$$P : (r,t) \in [0,1) \times \mathbb{R} \mapsto P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$$

(es habitual denotar a $P(r,t)$ por $P_r(t)$, se sobreentiende que $P_0(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$). Esta suma representa la suma de las series $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-int}$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{int}$. Ambas series son absolutamente convergentes para todo $(r,t) \in [0,1) \times \mathbb{R}$. Observamos que incluso, fijado $r \in [0,1)$, esas series son uniformemente convergentes en la variable $t \in \mathbb{R}$.

Nos interesa ahora obtener dos expresiones para el núcleo de Poisson que se utilizarán posteriormente: Dados $z = re^{i\theta}$, con $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
P_r(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-int} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left[e^{int} + e^{-int}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n 2\operatorname{Re}(e^{int}) = \\
&= \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{it}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right) = \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo t por $(\theta - t)$ se obtiene que

$$P_r(\theta - t) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right).$$

Por otra parte

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1+re^{it})(1-re^{-it})}{|1-re^{it}|^2}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Sustituyendo t por $(\theta - t)$ se obtiene que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2}$$

Propiedades del núcleo de Poisson:

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$ para todo $r \in [0,1)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.\end{aligned}$$

   nótese que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{int}$ es uniformemente convergente en $t \in \mathbb{R}$ y que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 0$ si $n \neq 0$.

2. $P_r(t) > 0$ para todo $r \in [0,1)$ y todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} > 0$$

   pues $1 - 2r\cos t + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2 > 0$.

3. $P_r(t) = P_r(-t)$ para todo $r \in [0,1)$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Para ver esto basta tener en cuenta que la expresión $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ toma el mismo valor en t y en $-t$ y también en t y $t + 2\pi$.

4. Para todo $r \in (0,1)$, todo δ y todo t tales que $0 < \delta < |t| \leq \pi$ se verifica que

$$P_r(t) < P_r(\delta).$$

   En efecto, fijados r, δ y t en las condiciones indicadas se verifica que $\cos t < \cos\delta$, de donde se sigue que $P_r(t) < P_r(\delta)$.

5. Para todo $\delta^* \in (0,\pi]$ se verifica que $\lim\limits_{r\to 1^-} P_r(\delta^*) = 0$ pues el numerador de $P_r(\delta^*)$ es $1-r^2$ y se verifica que $\lim\limits_{r\to 1^-}(1-r^2) = 0$. El denominador de $P_r(\delta^*)$ es $1-2r\cos\delta^*+r^2$ y $\lim\limits_{r\to 1^-}(1-2r\cos\delta^*+r^2) = 2-2\cos\delta^* > 0$ pues $\cos\delta^* < 1$.

Definición 9.5 *Se llama integral de Poisson de una función continua* $\psi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ *a la función*

$$\begin{aligned} P[\psi] \quad : \quad & z = re^{i\theta} \in D(0,1) \mapsto P[\psi](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\psi(e^{it})dt \\ = \quad & \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\psi(e^{it})dt\right). \end{aligned}$$

Observamos que la función

$$z \in D(0,1) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(0,1)} \frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{1}{iw}\psi(w)dw$$

es holomorfa en $D(0,1)$ pues la función

$$\varphi(z,w) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{1}{iw}\psi(w) : \ (z,w) \in D(0,1) \times \partial D(0,1)$$

es continua y existe $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)$ y es continua en todo punto de $D(0,1) \times \partial D(0,1)$. Dado que precisamente $P[\psi]$ es la parte real de esta función, resulta que $P[\psi]$ es armónica en $D(0,1)$.

El siguiente teorema proporciona una solución afirmativa al problema de Dirichlet planteado anteriormente.

Teorema 9.6 *Sea* $\psi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces la función*

$$u : z = re^{i\theta} \in \overline{D}(0,1) \mapsto u(re^{i\theta}) = \begin{cases} \psi(e^{i\theta}) & si\ r = 1 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\psi(e^{it})dt & si\ 0 \le r < 1 \end{cases}$$

es continua en $\overline{D}(0,1)$*, armónica en* $D(0,1)$ *y coincide con* ψ *en* $\partial D(0,1)$*.*

Demostración. Acabamos de probar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\psi(e^{it})dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\psi(e^{it})dt\right),$$

es armónica en $D(0,1)$ y claramente u coincide con ψ en $\partial D(0,1)$. Entonces, sólo nos falta probar que u es continua en $\partial D(0,1)$.

Para probar esto hay que demostrar que para todo $z_0 = e^{i\theta_0}$, $\theta_0 \in [-\pi,\pi)$, y todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D(e^{i\theta_0},\delta)\cap\overline{D}(0,1)$ se verifica que $|u(z)-u(e^{i\theta_0})| < \varepsilon$. Nosotros lo haremos para el caso en el que $z_0 = 1$ para simplificar un poco la escritura.

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de la función ψ en el punto 1 nos da que existe $\delta_0 > 0$, tal que

$$|u(z) - u(1)| = |\psi(z) - \psi(1)| < \varepsilon \text{ si } z \in D(1,\delta_0) \cap \partial D(0,1).$$

La continuidad de la función $t \mapsto \psi(e^{it})$ en 0 nos da que existe $\delta_1 > 0$, que supondremos menor que π, tal que

$$|\psi(e^{it}) - \psi(1)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |t| < \delta_1.$$

Por otra parte la función $\psi - \psi(1)$ es continua en $\partial D(0,1)$, luego existe $M > 0$ tal que

$$|\psi(z) - \psi(1)| \leq M \text{ para todo } z \in \partial D(0,1)$$

Por la propiedad 5 del núcleo de Poisson se tiene que

$$\mathit{lím}_{r\to 1^-} P_r\left(\tfrac{\delta_1}{2}\right) = 0$$

luego existe $r_0 \in (0,1)$ tal que si $r \in (r_0,1)$, entonces

$$0 < P_r\left(\tfrac{\delta_1}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Consideremos el conjunto

$$V = \left\{re^{i\theta} : r \in (r_0,2),\ |\theta| < \frac{\delta_1}{2}\right\}$$

este conjunto es un entorno abierto de 1. Vamos a ver cómo

$$|u(z) - u(1)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in V \cap D(0,1)$$

(para los $z \in \partial D(0,1)$ ya sabemos que también se verifica esa desigualdad).

Sea $z = re^{i\theta} \in V \cap D(0,1)$:

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - u(1)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\psi(e^{it})dt - u(1) \right| = \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)(\psi(e^{it}) - \psi(1))dt \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)|\psi(e^{it}) - \psi(1)|dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta_1,\delta_1]} P_r(\theta - t)|\psi(e^{it}) - \psi(1)|dt + \\
&\quad \frac{1}{2\pi} \int_{\{t\in[-\pi,\pi]:|t|\geq\delta_1\}} P_r(\theta - t)|\psi(e^{it}) - \psi(1)|dt.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $t \in [-\delta_1, \delta_1]$ se verifica que $|\psi(e^{it}) - \psi(1)| < \frac{\varepsilon}{3}$, y como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta_1,\delta_1]} P_r(\theta - t)dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt = 1,$$

el primer sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. Por otra parte si $t \in [-\pi, \pi]$ y $|t| \geq \delta_1$ entonces $|\theta - t| \geq |t| - |\theta| > \delta_1 - \frac{\delta_1}{2}$ por lo que $P_r(\theta - t) < P_r\left(\frac{\delta_1}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3M}$, pues $r \in (r_0, 1)$. Como $|\psi(e^{it}) - \psi(1)| \leq M$, se tiene que el segundo sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. En consecuencia $|u(re^{i\theta}) - u(1)| < \varepsilon$.

Si consideramos ahora $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $D(1, \delta) \subset V$ se verifica que

$$|u(re^{i\theta}) - u(1)| < \varepsilon \text{ para todo } re^{i\theta} \in D(1, \delta) \cap \overline{D}(0, 1).$$

□

El siguiente teorema garantiza, entre otras cosas, la unicidad de la solución al problema de Dirichlet.

Teorema 9.7 *Si u es una función real continua en $\overline{D}(0,1)$ y armónica en $D(0,1)$, entonces u es, en $D(0,1)$, la integral de Poisson de su restricción a $\partial D(0,1)$ y es, por lo tanto, la parte real de la función holomorfa*

$$z \in D(0,1) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{w + z}{w - z} \cdot \frac{1}{iw} u(w)dw.$$

Demostración. Llamamos u_1 a la función que da el teorema anterior, extensión de la función $u_{|\partial D(0,1)}$ y veamos como $u_1 = u$. Para ello sea $h = u - u_1$. Esta función es continua en $\overline{D}(0,1)$ (por serlo u y u_1), es armónica (por serlo u y u_1) y $h = 0$ en $\partial D(0,1)$. Probaremos que también $h = 0$ en $D(0,1)$ con lo que tendremos lo que queremos. Supongamos que existe un punto $z_0 \in D(0,1)$ tal que $h(z_0) \neq 0$, y supongamos, por un momento que $h(z_0) > 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon < h(z_0)$, definamos

$$g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2; \; z \in \overline{D}(0,1).$$

La continuidad de g en el compacto $\overline{D}(0,1)$ nos permite garantizar que existe $z_1 \in \overline{D}(0,1)$ tal que

$$g(z_1) \geq g(z) \text{ para todo } z \in \overline{D}(0,1).$$

Ahora bien, como $g(z_1) \geq g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon = g(z)\ \forall z \in \partial D(0,1)$ necesariamente $z_1 \in D(0,1)$. Entonces z_1 es un máximo de la función $(x,y) \mapsto g(x,y)$ en el abierto $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ y así sabemos, por resultados del Cálculo Diferencial que la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de g en z_1 es semidefenida negativa, esa forma cuadrática es

$$Q(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_1){h_1}^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(z_1)h_1h_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_1){h_2}^2$$

Dado que esa forma es semidefinida negativa, su valor es menor o igual que 0 para todo $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, con lo que $Q(h_1,0) \leq 0$ y $Q(0,h_2) \leq 0$, lo que implica que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_1) \leq 0$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_1) \leq 0$.

Como $g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2$, resulta que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z) + 4\varepsilon.$$

Dado que h es armónica en $D(0,1)$ y $z_1 \in D(0,1)$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(z_1) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(z_1) = 0,$$

con lo que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_1) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_1) = 4\varepsilon > 0$$

lo que contradice el que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_1) \leq 0$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_1) \leq 0$. Hemos probado entonces que no existe ningún punto de $D(0,1)$ en el que h tome un valor mayor que 0. Si suponemos que toma en algún punto de $D(0,1)$ un valor negativo se repite el argumento anterior con $-h$. Conclusión $h(z) = 0$ para todo $z \in \overline{D}(0,1)$, esto es, $u = u_1$ en $\overline{D}(0,1)$. □

Observaciones:

1. Dado que, según acabamos de ver, toda función continua en $\overline{D}(0,1)$ y armónica en $D(0,1)$ queda determinada por sus valores en $\partial D(0,1)$, es claro que la solución al problema de Dirichlet es única, dada la función continua $\psi : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$, la solución del correspondiente problema de Dirichlet es su integral de Poisson.

2. De acuerdo con el teorema anterior, si u es una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y armónica en $D(0,1)$, entonces para cada $r \in [0,1)$, y cada θ se verifica

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}u(e^{it})dt$$

lo que nos da una representación integral de los valores de u en $D(0,1)$ a partir de sus valores en $\partial D(0,1)$.

3. Los resultados anteriores se generalizan fácilmente para discos arbitrarios. Así, si ψ es una función real continua en $\partial D(a,R)$ y hacemos
$$u(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}\psi(a+Re^{it})dt$$
para $0 \leq r < R$, y $u(a+Re^{it}) = \psi(a+Re^{it})$, entonces u es continua en $\overline{D}(a,R)$ y armónica en $D(a,R)$. Por otra parte, si $u : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ es continua en $\overline{D}(a,R)$ y armónica en $D(a,R)$ entonces u es, en $D(a,R)$, la parte real de la función holomorfa
$$z \in D(a,R) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+\frac{z-a}{R}}{e^{it}-\frac{z-a}{R}}\psi(a+Re^{it})dt.$$
Se sigue de aquí que toda función armónica en un abierto es, localmente, la parte real de una función holomorfa. Obsérvese que esto ya lo vimos directamente al principio de la lección.

4. Si en la igualdad del apartado 3 hacemos $r=0$ obtenemos que
$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})dt$$
es decir, el valor de u en a es el promedio, en el sentido de la integral, de los valores que toma en la frontera del $D(a,R)$. Esta propiedad, que resulta ser muy interesante, se conoce como "propiedad del valor medio" y nos dice que si u es armónica en un abierto U, $a \in U$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset U$ entonces se da la igualdad anterior. Vamos a ver a continuación que esta propiedad, junto con la continuidad, caracterizan la armonicidad.

Teorema 9.8 *Sea $u : U \to \mathbb{R}$ una función continua que tenga la propiedad del valor medio. Entonces u es armónica en U.*

Demostración. Sean $a \in U$ y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset U$. Como se acaba de indicar, la restricción de u a $\partial D(a,R)$ da lugar a una función v que es continua en $\overline{D}(a,R)$, armónica en $D(a,R)$ y coincide con u en $\partial D(a,R)$. Comprobaremos que $u = v$ en $D(a,R)$ y por lo tanto u será armónica. Para ello sea $h = u - v$ y sea $M = \sup\{h(z) : z \in \overline{D}(a,R)\}$. Observamos que ese supremo es mayor o igual que 0 pues $h = 0$ en $\partial D(a,R)$. Supongamos que $M > 0$.

Sea
$$E = \{z \in \overline{D}(a,R) : h(z) = M\}.$$
Desde luego $E \neq \emptyset$, pues $\overline{D}(a,R)$ es compacto y h es continua. Además E es cerrado, pues $E = h^{-1}\{M\}$, y dado que E está contenido en el compacto $\overline{D}(a,R)$, resulta que E es compacto. Como $M > 0$ y $h = 0$ en $\partial D(a,R)$, necesariamente $E \subset D(a,R)$. Sea $z_0 \in E$ tal que $|z_0 - a| \geq |z-a|$ para todo $z \in E$ (pues E es compacto y $\varphi(z) = |z-a|$ es continua). Entonces, para todo $r > 0$ tal que $D(z_0,r) \subset D(a,R)$ existen $t_0 \in [-\pi,\pi)$ y

$0 < \delta < t_0$ tales que $z_0 + re^{it} \in \partial D(z_0, r) \cap E^c$ para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y por lo tanto $h(z_0 + re^{it}) < M$ para esos t. Como h tiene la propiedad del valor medio, por tenerla u y v, se tiene que

$$\begin{aligned} h(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(z_0 + re^{it})dt = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(z_0 + re^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{t_0-\delta} h(z_0 + re^{it})dt \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0+\delta}^{\pi} h(z_0 + re^{it})dt. \end{aligned}$$

Al ser $h(z_0 + re^{it}) < M$ para los $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ se tiene que

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(z_0 + re^{it})dt < M2\delta.$$

Por otra parte, la suma de los otros dos sumandos es menor o igual que $M(2\pi - 2\delta)$ con lo que

$$h(z_0) < \frac{1}{2\pi}[M2\delta + M(2\pi - 2\delta)] = M = h(z_0)$$

lo que es absurdo. Si repetimos el argumento con $-h$ obtendremos finalmente que $h = 0$ con lo que $u = v$. $\square$

Teorema 9.9 *(de Harnack) Si (u_n) es una sucesión de funciones armónicas en un abierto U y converge uniformemente en los compactos de U a una función u, entonces u es también una función armónica.*

Demostración. Ya sabemos que esta función u es continua, pues es el límite uniforme en los compactos de U de una sucesión de funciones continuas. Para ver que es armónica comprobaremos que tiene la propiedad de la media.

Para ello sean $a \in U$ y $R > 0$ tales que $\overline{D}(a, R) \subset U$. Entonces, como cada u_n tiene la propiedad de la media se verifica que

$$u_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a + Re^{it})dt.$$

Como $\{a + Re^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$ es un conjunto compacto, $u_n \to u$ uniformemente en él, luego la sucesión de funciones continuas $v_n(t) = u_n(a + Re^{it})$, $t \in [-\pi, \pi]$, converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a $v(t) = u(a + Re^{it})$ por lo que

$$u(a) = \lim_{n\to\infty} u_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} u_n(a + Re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})dt,$$

lo que prueba que u tiene la propiedad de la media. $\square$

Teorema 9.10 *(Desigualdades de Harnack) Si u es una función armónica en $D(a,R)$ que es continua y positiva en $\overline{D}(a,R)$ entonces se verifica que:*

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a)$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$ y para todo $r \in (0,R)$.

Demostración. Se verifica que $0 < R-r \leq |R-re^{i(\theta-t)}| \leq R+r$, utilizando las propiedades del módulo ($|a|-|b| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$ para todo $a,b \in \mathbb{C}$). Elevando al cuadrado, hallando inversos y multiplicando por R^2-r^2 se obtiene que

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}$$

Multiplicando ahora los tres miembros de esas desigualdades por $\frac{1}{2\pi}u(a+Re^{it}) \geq 0$ e integrando en $[-\pi,\pi]$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{R-r}{R+r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}u(a+Re^{it})dt \\ &\leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})dt\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})dt = u(a)$$

y que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}u(a+Re^{it})dt = u(a+re^{i\theta}).$$

$\square$

Obtenemos, finalmente, el siguiente corolario de este teorema.

Corolario 9.11 *Si tenemos una sucesión creciente $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ de funciones armónicas en un abierto conexo U entonces, o bien $\{u_n\}$ es uniformemente convergente en los compactos de U a una función armónica u, o bien $u_n(z) \to \infty$ para todo $z \in U$.*

Demostración. Supongamos que $u_1 \geq 0$, de no ser esto cierto, cambiamos cada u_n por $u_n - u_1$. Consideremos la función $u := \sup u_n \in [0,+\infty]$ y sean $A = \{z \in U : u(z) < \infty\}$ y $B = U \backslash A$. Fijemos ahora $a \in U$ y $R > 0$ tales que $\overline{D}(a,R) \subset U$. Por el teorema anterior,

$$\frac{R-r}{R+r}u_n(a) \leq u_n(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u_n(a)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ (téngase en cuenta que $u_n \geq 0$ para todo n) y todo $r < R$. Tomando supremos en n obtenemos que

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a)$$

para todo $r < R$, lo que nos da que, o bien $u(z) = \infty$ para todo $z \in D(a,R)$ o $u(z) < \infty$ para todo $z \in D(a,R)$. Esto demuestra que A y B son ambos abiertos, pues si $a \in A$ y $\overline{D}(a,R) \subset U$ resulta que $D(a,R) \subset A$, lo análogo si $a \in B$. La conexión de U nos da que o bien $A = \emptyset$, en cuyo caso $u(z) = \infty$ para todo $z \in U$ o bien $A = U$. En este caso tenemos que la sucesión $\{u_n\}$, que es monótona creciente, converge a la función real u (nótese que $u = \sup u_n$ y que estamos suponiendo que $u(z) \in [0, +\infty)$).

La convergencia uniforme en compactos se sigue del hecho de que cuando una sucesión de funciones reales continuas converge de forma monótona hacia una función continua, entonces la convergencia es uniforme en los compactos (la demostración puede verse en el libro de W. Rudin, Principios de Análisis Matemático, teorema 7.13). Finalmente, la función u, al ser límite uniforme en los compactos de una sucesión de funciones armónicas, es armónica. $\square$

APÉNDICE I

Demostración original del T. de Cauchy (de 1825, siguiendo el Churchill-Brown, pp. 122-123)

Teorema. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado simple (esto es, γ es inyectiva en (a,b)) y denotemos por R a la región que determina la parte del plano que encierra este camino. Supongamos que f es una función derivable en un abierto que contenga a R y a γ^* y que la derivada de esta función es continua en R. Entonces $\int_\gamma f = 0$.

Demostración. Hagamos $f = u + iv$ y $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t)))(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt \\
&= \int_a^b (u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t) \\
&\quad + i(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t))dt \\
&= \int_a^b \langle (u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)), -v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))), (\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))\rangle \\
&\quad + i\int_a^b \langle (v(\gamma_1(t),\gamma_2(t)), u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))), (\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))\rangle dt \\
&= \int_\gamma (u,-v) + i\int_\gamma (v,u).
\end{aligned}$$

Si escribimos esto en la forma:

$$\int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

y aplicamos el teorema de Green* obtenemos

$$\int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy = \int\int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann nos dan que $-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ por lo que

$$\int_\gamma f = 0.$$

*El teorema de Green prueba que si dos funciones reales P y Q son continuas y tienen sus derivadas parciales continuas en $R \cup \gamma^*$ entonces

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

APÉNDICE II

Justificación de por qué se dice que el índice de un punto respecto a un camino representa el "número de vueltas" que éste da alrededor del punto.

Lema 1. Toda aplicación continua f de un intervalo $[a, b]$ con valores en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tiene una determinación continua de su argumento (y por lo tanto de su logaritmo).

Demostración. Observamos en primer lugar que si D es un disco que no contiene al 0 entonces existe una determinación continua del argumento en D, basta considerar una semirecta que pase por el 0 y no corte al disco. Los puntos de esa sermirecta tienen un Argumento Principal, llamémosle θ_0, entonces la elección del argumento principal asociada la intervalo $[-\theta_0, \theta_0)$ nos da una determinación continua del argumento en D.

Como γ^* es compacto, y $|f|$ alcanza su mínimo m en él, este mínimo es > 0 y por la continuidad uniforme de f en $[a, b]$ podemos encontrar una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que $|f(t) - f(t_j)| < m$ para todo $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, ..., n$, Entonces $f(t) \in D_j := D(f(t_j), m)$ y 0 no pertenece a ninguno de esos discos, por lo tanto podemos elegir una determinación continua θ_j para cada uno de esos discos. Veamos cómo podemos construir una para f en todo $[a, b]$.

Se tiene que $f(t) = |f(t)|e^{i\theta_1(t)}$ para todo $t \in [a, t_1]$ y $f(t) = |f(t)|e^{i\theta_2(t)}$ para todo $t \in [t_1, t_2]$. En particular $e^{i\theta_1(t_1)} = e^{i\theta_2(t_1)}$ por lo que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2(t_1) = \theta_1(t) + 2k_1\pi$. Entonces $\theta_1(t) + 2k_1\pi$ es una determinación continua del argumento de f en $[a, t_2]$. Aplicando este argumento a $[a, t_2]$ y $[t_2, t_3]$ obtenemos una determinación continua del argumento de f en $[a, t_3]$, y repitiendo este proceso acabamos obteniendo una determinación continua del argumento de f en $[a, b]$.

Lema 2. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado tal que $0 \notin \gamma^*$ y sea θ una determinación continua del argumento de γ. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$$

es un número entero que no depende de la determinación continua del argumento elegida.

Demostración. Por definición de determinación continua del argumento, θ es continua y

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\theta(t)} \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Entonces

$$e^{i[\theta(b)-\theta(a)]} = \frac{\gamma(b)}{|\gamma(b)|}\frac{|\gamma(a)|}{\gamma(a)} = 1$$

al ser el camino cerrado. Si φ es otra determinación continua del argumento de γ sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(t) - \varphi(t) = 2m\pi$ para todo $t \in [a, b]$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)] &= \frac{1}{2\pi}[\varphi(b) + 2m\pi - (\varphi(a) + 2m\pi)] \\ &= \frac{1}{2\pi}[\varphi(b) - \varphi(a)]. \end{aligned}$$

Teorema. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un camino cerrado y z_0 un complejo que no esté en γ^*. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w - z_0}dw = \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$$

siendo θ cualquier determinación continua del argumento de $\gamma - z_0$ en $[a, b]$.

Demostración. Consideremos una determinación continua θ del argumento de $\gamma - z_0$ en $[a, b]$ (tal determinación existe por el Lema 1) y consideremos el logaritmo holomorfo g de $\gamma - z_0$ definido por $g(t) = \log|\gamma(t) - z_0| + i\theta(t),\ t \in [a, b]$. Entonces, por la Regla de Barrow,

$$\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}dt = g(b) - g(a)$$

pues como $e^{g(t)} = \gamma(t) - z_0$, resulta que $g'(t)e^{g(t)} = \gamma'(t)$ y, en consecuencia, $g'(t)(\gamma(t) - z_0) = \gamma'(t)$, esto es,

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

APÉNDICE III
En simplemente conexos todo ciclo es homólogo a 0

Vamos a demostrar ahora que si tenemos un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ entonces todo ciclo en él es homólogo a 0. Tendremos entonces que en este tipo de abiertos se verifica la fórmula integral de Cauchy cualquiera que sea el ciclo (en particular el camino cerrado) que consideremos en el abierto.

Para demostrar esto usaremos el siguiente lema:

Lema 9.12 *Sean γ_0 y $\gamma_1 : I \to \mathbb{C}$ dos caminos cerrados y supongamos que para un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ se verifica que*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \text{ para todo } s \in I,$$

entonces $Ind_{\gamma_1}(\alpha) = Ind_{\gamma_0}(\alpha)$.

Demostración. Consideremos el camino

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}$$

Por la condición del lema, $\gamma^* \subset D(1,1)$, por lo que $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$. Ahora bien,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'}{\gamma}(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha}(t)dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}(t)dt$$

de donde se sigue que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$. □

Teorema 9.13 *Si γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrados homótopos en un abierto U, entonces para todo punto $\alpha \in \mathbb{C}\backslash U$ se verifica que $Índ_{\gamma_1}(\alpha) = Índ_{\gamma_0}(\alpha)$.*

Demostración. Fijemos un punto $\alpha \in \mathbb{C}\backslash U$. Sea $H : I \times I \to U$ una aplicación continua tal que:

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \gamma_0(s) \quad \text{para todo } s \in I, \\ H(s,1) &= \gamma_1(s) \quad \text{para todo } s \in I, \\ H(0,t) &= H(1,t) \text{ para todo } t \in I. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Al ser $I \times I$ un compacto, $H(I \times I)$ es un compacto de U. Dado que $\alpha \in \mathbb{C}\backslash U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \tag{9.2}$$

para todo $s, t \in I$. Por otra parte, al ser H continua en el compacto $I \times I$, es uniformemente continua en él, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |s - s'| + |t - t'| \leq \frac{1}{n}. \tag{9.3}$$

Consideremos las poligonales cerradas definidas por

$$\lambda_k(s) = H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j - ns) + H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns - (j-1)) \tag{9.4}$$

cuando $s \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$ para algún $j = 1, ..., n$ y $k = 0, ..., n$.

Nótese que en cada $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, λ_k es de la forma $a(1-t) + bt = a + t(b-a)$, que es el segmento que une a con b. De la propia definición de λ_k y de (9.3) se sigue que:

$$\left|\lambda_k(s) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| \leq \left|H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right|(j - ns) +$$

$$\left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right|(ns + 1 - j) < \varepsilon(j - ns) + \varepsilon(ns - (j-1)) = \varepsilon \tag{9.5}$$

para todo $s \in I$ (nótese que $j - ns + ns - (j-1) = 1$). En particular, para $k = 0$ y $k = n$ se tiene que

$$|\lambda_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\lambda_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon \text{ para todo } s \in I. \tag{9.6}$$

De (9.2) y (9.5) se sigue que

$$|\alpha - \lambda_k(s)| \geq \left|\alpha - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| - \left|H\left(s, \frac{k}{n}\right) - \lambda_k(s)\right| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \tag{9.7}$$

para todo $s \in I,\ k = 0, ..., n$. Por otra parte, de (9.4) y (9.3) se deduce que

$$|\lambda_{k-1}(s) - \lambda_k(s)| \leq$$

$$\left|H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right|(j - ns) +$$

$$\left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\right|(ns - (j-1)) < \varepsilon \tag{9.8}$$

para todo $s \in I,\ k = 1, ..., n$. Se sigue entonces de (9.8) y (9.7) que

$$|\lambda_{k-1}(s) - \lambda_k(s)| < |\alpha - \lambda_k(s)| \text{ para todo } s \in I,\ k = 1, ..., n.$$

Aplicando el Lema anterior $(n+2)$ veces (en el primer y el último paso se usa (9.6)), obtenemos que α tiene el mismo índice respecto a los caminos $\gamma_0, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, \gamma_1$ y por lo tanto

$$Índ_{\gamma_1}(\alpha) = Índ_{\gamma_0}(\alpha).$$

$\square$

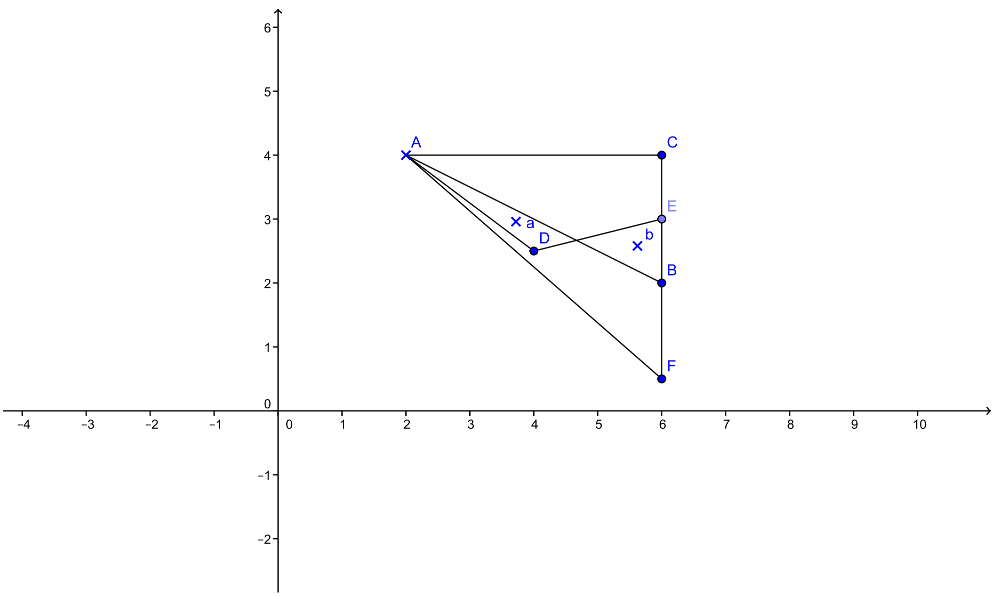
Nota 9.14 *Hemos recurrido a las poligonales λ_k debido a que es posible que las curvas $\lambda_t(s) = H(s,t)$ no sean caminos.*

Corolario 9.15 *Todo camino homótopo a 0 en un abierto es homólogo a 0 en él.*

Demostración. Sean U un abierto del plano y γ un camino (cerrado) homótopo a 0 en él, al ser γ homótopo a una curva constante en U, el teorema nos da que para todo $\alpha \in \mathbb{C}\backslash U$ se verifica que $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$, pues evidentemente α tiene índice cero respecto a cualquier constante. Es decir, γ es homólogo a 0 en U. □

Corolario 9.16 *Si U es un abierto simplemente conexo, entonces todo camino cerrado (y por lo tanto todo ciclo) es homólogo a 0 en U. Por lo tanto en este tipo de abiertos tiene validez global la fórmula integral de Cauchy.*

Nota 9.17 *Pueden existir caminos homólogos a 0 en un abierto que sin embargo no son homótopos a 0 en el abierto. Tómese para ello como abierto U a $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$, siendo a y b dos números complejos distintos. El camino $ABCADEFA$ de la figura es homólogo a 0 en U pero no es homótopo a 0 en él.*



APÉNDICE IV

Dominios de Dirichlet

El problema de Dirichlet puede plantearse en cualquier abierto que tenga frontera no vacía. Se dice que un dominio (abierto y conexo) de $\mathbb{C}$ con frontera no vacía es un dominio (o región) de Dirichlet si en él el problema de Dirichlet tiene solución. Esto es, si dada una función continua en su frontera existe una función continua en la adherencia del dominio y armónica en el dominio que coincida con la función dada en su frontera.

Como indicaremos un poco más adelante no todo abierto, incluso acotado, es una región de Dirichlet, pero sí lo son todos los abiertos simplemente conexos. Daremos aquí un esquema de la demostración de esto. Necesitaremos introducir algunos conceptos y resultados previos.

Recordamos que una función armónica en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ (con valores en $\mathbb{R}$) es una función de clase $\mathcal{C}^2$ que verifica la ecuación de Laplace, o equivalentemente, una función continua que verifica la igualdad de la media.

Definición 9.18 *Se dice que una función continua v en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}$ es* ***subarmónica*** *en U si verifica la siguiente desigualdad de la media: Para todo $a \in U$ y para todo $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(a, \rho) \subset U$ se verifica que*

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(a + re^{it})dt.$$

Se dice que una función continua es ***superarmónica*** *si en las condiciones anteriores se da la desigualdad contraria.*

Evidentemente, toda función armónica es a la vez subarmónica y superarmónica y toda función que sea a la vez subarmónica y superarmónica es armónica.

Las funciones subarmónicas verifican un principio del máximo (primera versión) similar al que verifican las funciones holomorfas. Esto es, si $v : U \to \mathbb{R}$ es una función subarmónica en el dominio U y existe un punto $a \in U$ tal que $v(a) \geq v(z)$ para todo $z \in U$, entonces v es constante.

La demostración de esto se obtiene probando que el conjunto de puntos en los que la función alcanza el máximo es abierto y cerrado en U la clave (para probar que es abierto) reside en la desigualdad de la media que verifican las funciones subarmónicas.

En lo que sigue se necesitará otra versión del teorema del máximo, será consecuencia del siguiente teorema:

Proposición 9.19 *Sea U un dominio acotado y sea φ una función real subarmónica acotada definida en U. Si para cada punto $a \in \partial U$ se verifica que*

$$\mathop{límsup}_{z \to a} \varphi(z) \leq 0$$

entonces, o bien $\varphi(z) < 0$ para todo $z \in U$ o bien $\varphi(z) = 0$ para todo $z \in U$.

Demostración. Recordamos en primer lugar qué es el límite superior y el límite inferior (se usará enseguida) de una función real $\varphi : U \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in \overline{U}$. Se definen como

$$\mathop{límsup}_{z \to a} \varphi(z) = \lim_{r \to 0^+} sup\{\varphi(z) : z \in D(a, r) \cap U\}$$

$$\mathop{líminf}_{z \to a} \psi(z) = \lim_{r \to 0^+} inf\{\psi(z) : z \in D(a, r) \cap U\}.$$

Supongamos que existe un punto $b \in U$ tal que $\varphi(b) > 0$, elijamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(b) > \varepsilon$ y definamos

$$B_\varepsilon = \{z \in U : \varphi(z) \geq \varepsilon\}.$$

Observamos que B_ε no es vacío pues $b \in B_\varepsilon$. Sea $a \in \partial U$, como estamos suponiendo que

$$\lim_{r \to 0^+} \sup\{\varphi(z) : z \in D(a, r) \cap U\} \leq 0,$$

existe $\delta_a > 0$ tal que

$$\varphi(z) < \varepsilon \text{ para todo } z \in D(a, \delta_a) \cap U.$$

Ahora bien, $\bigcup_{a \in \partial U} D(a, \delta_a)$ es un recubrimiento abierto del compacto ∂U y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(z) < \varepsilon$ para todo $z \in U$ que diste de ∂U menos que δ. En consecuencia

$$B_\varepsilon \subset \{z \in U : dist(z, \partial U) \geq \delta\}.$$

Por lo tanto B_ε es un conjunto acotado que claramente es cerrado, luego es un compacto. Sea $z_0 \in B_\varepsilon$ tal que $\varphi(z_0) \geq \varphi(z)$ para todo $z \in B_\varepsilon$ (φ es continua). Como $\varphi(z) < \varepsilon$ para todo $z \in U \backslash B_\varepsilon$ resulta que φ alcanza un máximo absoluto en U y por lo tanto debe ser constante, esta constante debe ser $\varphi(z_0)$ que es mayor que $\varepsilon > 0$ y esto contradice la hipótesis de que $\lim_{z \to a} \sup \varphi(z) \leq 0$ (pues al ser φ constante ese límite superior sería mayor que 0), y demuestra que $\varphi(z) \leq 0$ para todo punto de U. Si φ se anula en algún punto de U entonces φ alcanza el máximo en un punto de U y por lo tanto es constante, necesariamente la constante 0. Si φ no se anula nunca, necesariamente $\varphi(z) < 0$ para todo $z \in U$. $\square$

Corolario 9.20 (segunda versión del teorema del módulo máximo) *Sea U un dominio acotado y sean φ y ψ dos funciones reales acotadas definidas en U siendo φ subarmónica y ψ superarmónica. Si para cada punto $a \in \partial U$ se verifica que*

$$\mathop{límsup}_{z \to a} \varphi(z) \leq \mathop{líminf}_{z \to a} \psi(z)$$

entonces, o bien $\varphi(z) < \psi(z)$ para todo $z \in U$ o bien $\varphi = \psi$ y en este caso φ es armónica.

Demostración. Como

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{r\to 0^+} (\sup\{\varphi(z) : z \in D(a,r) \cap U\} - \inf\{\psi(z) : z \in D(a,r) \cap U\}) \\ &= \lim_{r\to 0^+} (\sup\{\varphi(z) : z \in D(a,r) \cap U\} + \sup\{-\psi(z) : z \in D(a,r) \cap U\}) \\ &\geq \lim_{r\to 0^+} \sup\{\varphi(z) - \psi(z) : z \in D(a,r) \cap U\} \end{aligned}$$

podemos aplicar a la diferencia $\varphi - \psi$ el teorema anterior, téngase en cuenta que al ser ψ superarmónica, $-\psi$ es subarmónica y entonces $\varphi - \psi$ es subarmónica y se verifican las hipótesis del teorema. □

Para abordar una solución al Problema de Dirichlet para un dominio acotado U introducimos el concepto de **Familia de Perron** asociada a una función continua en la frontera de U, en él intervienen las funciones subarmónicas.

Definición 9.21 *Dada una función continua f en la frontera ∂U de un dominio acotado U del plano se define la familia de Perron asociada a ella como*

$$\mathcal{P}(f,U) = \left\{ \varphi : U \to \mathbb{R},\ \varphi \text{ subarmónica en } U \text{ y } \limsup_{z\to a} \varphi(z) \leq f(a)\ \forall a \in \partial U \right\}$$

Observamos que esta familia nunca es vacía pues al ser f continua en ∂U es acotada en ese compacto, esto es, existe $M > 0$ tal que $f(z) \in [-M, M]$ para todo $z \in \partial U$ y la función constante $\varphi(z) = -M$ pertenece a $\mathcal{P}(f,U)$.

Pues bien, si se define:

$$u(z) = \sup\{\varphi(z) : \varphi \in \mathcal{P}(f,U)\} : z \in U,$$

resulta que esta función es armónica en U (Teorema 3.11 del Conway). Si se verificase que $\lim_{z\to a} u(z) = f(a)$ para todo $a \in \partial U$ entonces la función u prolongada a ∂U dándole el valor $f(a)$ en cada punto de ∂U sería una función continua en $\overline{U}$ y armónica en U y solucionaría el problema de Dirichlet.

Puede probarse que $\lim_{z\to a} u(z) = f(a)$ cuando U es simplemente conexo y por lo tanto todos los abiertos simplemente conexos acotados son regiones de Dirichlet. Para conseguir eso se introduce el concepto de punto barrera de un abierto. La definición es como sigue:

Definición 9.22 *Dados un dominio acotado U y un punto $a \in \partial U$ se dice que a es un* ***punto barrera*** *para U si existe una familia $\{\psi_r : r > 0\}$ de funciones superarmónicas tales que:*

1. $0 \leq \psi_r \leq 1$

2. $\lim\limits_{z \to a} \psi_r(z) = 0$

3. $\lim\limits_{z \to w} \psi_r(z) = 1$ *para todo* $w \in U$ *tal que* $|w - a| = r$.

Sucede que si un dominio tiene una barrera en cada punto de su frontera en ese dominio se verifica que $\lim\limits_{z \to a} u(z) = f(a)$ para todo $a \in \partial U$ y, como ya se ha dicho, entonces ese dominio es una región de Dirichlet (esto se demuestra en el Teorema 4.3 del Conway).

El próximo paso consiste en demostrar que en los dominios simplemente conexos todo punto de su frontera es una barrera para él y entonces todo dominio simplemente conexo es una región de Dirichlet, esto se hace en el Corolario 4.18 del libro de Conway. Por cada $a \in \partial U$ las funciones ψ_r que forman la barrera se construyen de una forma bastante complicada a través de unos logaritmos.

Todo lo que se ha dicho aquí puede verse en el libro de Conway entre las páginas 263-274.

En este libro se trabaja con un concepto un poco distinto del que tenéis de punto frontera de un conjunto. Se usa la notación $\partial_\infty U$ para denotar lo que llama frontera extendida que es la frontera de U, pero pensado éste en la compactificación $\widehat{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$ por un punto (el punto del infinito). Si U es acotado coinciden $\partial_\infty U$ y ∂U, si U no es acotado entonces $\partial_\infty U = \partial U \cup \{\infty\}$. $\widehat{\mathbb{C}}$ es la llamada esfera de Riemann, que es la esfera de centro $(0, 0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$.

No todo dominio del plano es una región de Dirichlet, esto le ocurre a $U = D(0, 1) \backslash \{0\}$. La prueba no es inmediata, puede verse en la p. 268 del libro de Conway.

APÉNDICE V

El teorema de Montel.

Se conoce del curso de Cálculo Diferencial que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Los conceptos de conjunto cerrado y de conjunto compacto pueden introducirse en cualquier espacio topológico, el de acotación requiere de una idea de proximidad y entonces hace falta una estructura que nos de esa idea, digamos que una estructura de espacio métrico (hay algo más general). Podía entonces pensarse que en todos los espacios métricos se va a verficar que los conjuntos compactos son aquellos que son cerrados y acotados. Pero no, aunque sí es verdad que todo conjunto compacto es cerrado y acotado, no es cierto, en general, que todos los conjuntos cerrados y acotados sean compactos. Hay un teorema de F. Riesz que dice que en un espacio normado hay alguna bola cerrada que sea compacta, entonces el espacio normado tiene dimensión finita. Por lo tanto, en ningún espacio normado de dimensión infinita es cierto que compacto$\Leftrightarrow$cerrado y acotado. Pero hay espacios de dimensión infinita en los que si es cierta esa equivalencia, ciertamente no son espacios normados, pero pueden ser métricos (no normados). El primer ejemplo conocido es el del espacio $\mathcal{H}(U)$ de las funciones holomorfas dotado de la topología compacto-abierta. Esta topología tiene como una base de sus abiertos la colección de los conjuntos

$$B_f(K,\varepsilon) : \{g \in \mathcal{H}(U) : \sup\{|g(z) - f(z)| : z \in K\} < \varepsilon\}$$

cuando f recorre $\mathcal{H}(U)$, K recorre la familia de los compactos de U y ε recorre el conjunto de los números reales mayores que 0. Si $f = 0$ entonces

$$B_0(K,\varepsilon) = \{g \in \mathcal{H}(U) : |g(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in K\}.$$

De aquí el nombre de topología compacto-abierta, los elementos de $B_0(K,\varepsilon)$ meten el compacto K en el abierto $D(0,\varepsilon)$. Esta topología es la topología asociada a la métrica d en $\mathcal{H}(U)$ definida de la siguiente forma: Se considera una sucesión expansiva $\{K_n\}$ de compactos de U (daremos luego un ejemplo de una tal sucesión) cuya unión lo recubre y tal que para todo n, $K_n \subset K_{n+1}^\circ$, y se define:

$$d(f,g) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{|f-g|_{K_n}}{1 + |f-g|_{K_n}}$$

(nótese que esa serie converge, sus términos son menores que $\frac{1}{2^n}$). La notación $|h|_K$ es usa para el $\sup\{|h(z)| : z \in K\}$.

Pues bien, vamos a ver, sin mucho detalle, que en $\mathcal{H}(U)$ los conjuntos cerrados y acotados son compactos. Recordamos que un subconjunto de un espacio métrico que sea cerrado y acotado es compacto si (y sólo si) toda sucesión de elementos del él tiene una subsucesión convergente (teorema de Bolzano-Weierstrass), eso es lo que demuestra el llamado **Teorema de Montel** (Paul Montel, matemático francés 1876-1975, el teorema es de 1927). Veamos una idea de la prueba para que se observe, como no podía ser de otra manera, que la clave para poder demostrarlo es la fórmula integral de Cauchy. Los conjuntos acotados en este espacio métrico son los conjuntos uniformemente acotados en los compactos de U.

Fijemos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones holomorfas en U y consideremos la sucesión de compactos

$$K_n = \overline{D}(0,n) \cap \left\{ z \in U : dist(z, \mathcal{C}U) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$M_n = \sup\{|f(z)| : z \in K_n,\ f \in \mathcal{F}\}$$

y

$$\delta_n = \frac{1}{2} dist(K_n, \mathcal{C}\overset{\circ}{K}_{n+1}).$$

Obsérvese que $\delta_n > 0$ (nótese que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$).

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z' \in K_n$ denotemos por γ_n la circunferencia positivamente orientada de centro z' y radio $2\delta_n$. La fórmula integral de Cauchy nos da que para todo $z'' \in U$ tal que $|z'' - z'| < \delta_n$ se verifica que

$$\begin{aligned} f(z') - f(z'') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \left(\frac{f(w)}{w - z'} - \frac{f(w)}{w - z''} \right) dw = \\ & \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{(w - z')(w - z'')} dw. \end{aligned}$$

Como para todo $w \in \gamma_n$ se tiene que $|w - z'| = 2\delta_n$ y $|w - z''| > \delta_n$ resulta que

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{M_{n+1}}{\delta_n} |z' - z''| \tag{9.9}$$

para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z'' \in U$ tal que $|z'' - z'| < \delta_n$ y entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en z', lo que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ | \ \ |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

A partir de aquí lo que realmente haremos es la demostración del llamado teorema de Arzelá-Ascoli que establece que una familia de funciones continuas que sea puntualmente acotada y equicontinua en cada punto tiene una subsucesión uniformemente convergente en los compactos. Como acabamos de ver nuestra $\mathcal{F}$ está en esas condiciones.

Sea $\{f_m\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, demostraremos que esa sucesión posee una subsucesión uniformemente convergente en los compactos de U a una función holomorfa en U. Sea $\{w_j\}$ una sucesión densa en U. $\{f_m(w_1)\}$ es una sucesión acotada de números complejos y entonces existe una subsucesión $\{f_{m,1}\}$ de $\{f_m\}$ tal que $\{f_{m,1}(w_1)\}$ es convergente. $\{f_{m,1}(w_2)\}$ es acotada en $\mathbb{C}$ y por lo tanto existe una subsucesión $\{f_{m,2}\}$ de $\{f_{m,1}\}$ tal que $\{f_{m,2}(w_2)\}$ es convergente, ciertamente también lo es $\{f_{m,2}(w_1)\}$. Reiterando este proceso obtenemos, para cada $j \in \mathbb{N}$ una subsucesión $\{f_{m,j}\}$ de $\{f_m\}$ que converge en $w_1, ..., w_j$. La sucesión diagonal $\{f_{m,m}\}$ converge entonces en todos los puntos de la sucesión $\{w_j\}$. Vamos a ver como $\{f_{m,m}\}$ es de Cauchy. Para ello consideremos un compacto K_n de los antes definidos. Dado $\varepsilon > 0$ sea

$$\delta = mín \left\{ \frac{\varepsilon \delta_n}{3M_{n+1}}, \delta_n \right\}.$$

La compacidad de K_n nos garantiza la existencia de una cantidad finita de puntos $w_1, ..., w_p$ de la sucesión $\{w_n\}$ tal que

$$K_n \subset \cup_{j=1}^{p} D(w_j, \delta).$$

Dado que $\{f_{m,m}\}$ converge en cada uno de los puntos $w_1, ..., w_p$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{r,r}(w_j) - f_{s,s}(w_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall r, s \geq \nu \text{ y } \forall j = 1, ..., p.$$

Como todo $z \in K_n$ verifica que $|z - w_j| < \delta$ para algún $j = 1, ..., p$ y $\delta \leq \delta_n$, tenemos por 9.9 que

$$|f_{m,m}(z) - f_{m,m}(w_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall m$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| \leq \ & |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(w_j)| \\ & + |f_{r,r}(w_j) - f_{s,s}(w_j)| \\ & + |f_{s,s}(w_j) - f_{s,s}(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in K_n. \end{aligned}$$

Tenemos así que $\{f_{m,m}\}$ es de Cauchy uniformemente en los compactos de U (téngase en cuenta que cada compacto de U está contenido en alguno de los K_n) y por lo tanto convergente a una cierta función $f \in \mathcal{H}(U)$ de modo uniforme en los compactos de U.